LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTE-TERRITORIO

Corso di Matematica 2

Padova 10-12-07

TEMA n.1

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

- a) L'applicazione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 1$, è lineare.
- b) L'insieme delle soluzioni del sistema lineare $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + 3z = 1 \end{cases}$, nelle incognite x, y, z , è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
- c) Il vettore $(1, 0)$ è un autovettore della matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Risposte

- a) Falso: $f(2) = e^2 - 1 = (e + 1)(e - 1) \neq 2(e - 1) = 2f(1)$, dato che $e \neq 1$.
- b) Falso: Il sistema non è omogeneo, $(0, 0, 0)$ non è una soluzione.
- c) Falso: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, che non è un multiplo di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Verificare che esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ soddisfacente le seguenti condizioni:

$$f(1, 2, -1) = (1, 0, 1, 0); \quad f(0, 4, 1) = (1, 1, 3, 2); \quad f(1, -1, -2) = (1, 0, 1, 1); \quad f(2, 5, -2) = (3, 1, 5, 3).$$

- a) Scrivere la matrice di f rispetto alle basi canoniche.
- b) Determinare nucleo ed immagine di f . L'applicazione f è iniettiva? È suriettiva?
- c) Determinare, se esistono, i vettori della varietà lineare $(0, 0, 1, 1) + \langle (1, 0, 2, 1) \rangle$ che appartengono ad $\text{Im } f$. Calcolare la controimmagine di tali vettori.
- d) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare nucleo ed immagine dell'applicazione lineare $g_k : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $g_k(x, y, z, t) = (x - z + t, y, (k + 1)x - kt)$.
- e) Per quali $k \in \mathbb{R}$ l'applicazione $g_k \circ f$ è un isomorfismo?

Svolgimento. I primi tre vettori assegnati nel dominio sono una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$: possiamo verificarlo mostrando che la matrice che ha sulle colonne questi vettori è invertibile, con inversa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 \\ -5 & 1 & -3 \\ -6 & 1 & -4 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Esiste pertanto un'unica applicazione f che soddisfa le prime tre condizioni. Per stabilire se questa f soddisfa anche la quarta condizione, scriviamo il quarto vettore come combinazione lineare dei primi tre: $(2, 5, -2) = (1, 2, -1) + (0, 4, 1) + (1, -1, -2)$. Poiché $(3, 1, 5, 3) = (1, 0, 1, 0) + (1, 1, 3, 2) + (1, 0, 1, 1)$ è combinazione lineare con gli stessi coefficienti, f soddisfa le condizioni assegnate.

a) La matrice della f nelle basi $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ e canonica di $\mathbb{R}^4$ è semplicemente la matrice che ha sulle colonne le immagini assegnate dei vettori di $\mathcal{B}$:

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{E}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per scrivere la matrice della f rispetto alle basi canoniche dobbiamo cambiare la base nel dominio, ossia moltiplicare a destra per la matrice $M(id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{E}_3, \mathcal{B})$ del cambiamento di base in $\mathbb{R}^3$ dalla base canonica alla $\mathcal{B}$, cioè la matrice calcolata in (1). Quindi:

$$M(f; \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4) = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{E}_4)M(id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{E}_3, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 \\ -5 & 1 & -3 \\ -6 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ -5 & 1 & -3 \\ -14 & 3 & -9 \\ -16 & 3 & -10 \end{pmatrix}.$$

b) Per studiare la f , riduciamo in forma a scala la matrice $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{E}_4)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice ha dunque rango 3, pertanto la f è iniettiva ed $\text{Im } f = \langle (1, 0, 1, 0), (1, 1, 3, 2), (1, 0, 1, 1) \rangle$ ha dimensione 3. Per il teorema delle dimensioni, non esistono applicazioni lineari suriettive $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$.

c) Un vettore $(k, 0, 2k+1, k+1) \in (0, 0, 1, 1) + \langle (1, 0, 2, 1) \rangle$ appartiene ad $\text{Im } f$ se e solo se è combinazione lineare dei generatori, cioè se e solo se

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ k & 0 & 2k+1 & k+1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k+1 & k+1 \end{pmatrix} = 3$$

vale a dire per $k = -1$. Per tale valore, il vettore è $(-1, 0, -1, 0) = -(1, 0, 1, 0)$, quindi

$$f^{-1}(-1, 0, -1, 0) = -f^{-1}(1, 0, 1, 0) = -(1, 2, -1) = (-1, -2, 1).$$

d) Per studiare l'applicazione g_k , riduciamo in forma a scala la matrice $M(g_k; \mathcal{E}_4, \mathcal{E}_3)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k+1 & 0 & 0 & -k \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 & -2k-1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo quindi che, per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$, g_k è suriettiva e $\ker g_k = \langle (k, 0, 2k+1, k+1) \rangle$.

e) Poiché $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ è sempre iniettiva, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ appartiene al nucleo di $g_k \circ f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ se e solo se $f(\mathbf{v}) \in \ker g_k$ e quest'ultimo è generato da $(k, 0, 2k+1, k+1) = (0, 0, 1, 1) + k(1, 0, 2, 1) \in (0, 0, 1, 1) + \langle (1, 0, 2, 1) \rangle$. Da c) segue allora che $g_k \circ f$ è iniettiva (e quindi anche suriettiva, dato che si tratta di un endomorfismo) se e solo se $k \neq -1$.

Esercizio 2 Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & \alpha + 1 \end{pmatrix}.$$

- Il sottospazio $\langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$ contiene autovettori di A_α ?
- Determinare gli autovalori e gli autospazi di A_α .
- Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice è diagonalizzabile.
- Esistono valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali gli autospazi siano tra loro ortogonali?
- Per $\alpha = 0$, determinare una matrice H tale che $H^{-1}AH$ sia triangolare superiore.

Svolgimento. a) Un vettore $(a, b, 0) \in \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$ è autovettore di A_α se

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & \alpha + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \\ 2a + 2b \end{pmatrix}$$

è un multiplo di $(a, b, 0)$. Dobbiamo quindi avere che $a + b = 0$, cioè $b = -a$, ed allora A_α trasforma $(a, -a, 0)$ in $(-a, a, 0)$. Ossia $(1, -1, 0)$ è autovettore di autovalore -1 per ogni α .

b) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A_α

$$p_\alpha(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 & \alpha \\ 1 & -t & 2 \\ 2 & 2 & \alpha + 1 - t \end{pmatrix} = -t^3 + (\alpha + 1)t^2 + (2\alpha + 5)t + \alpha + 3.$$

Da a) sappiamo che -1 è radice di $p_\alpha(t)$; dividendo troviamo che $\frac{-p_\alpha(t)}{t+1} = t^2 - (\alpha + 2)t - (\alpha + 3)$ e risolvendo l'equazione di secondo grado troviamo la fattorizzazione $p_\alpha(t) = -(t+1)^2(t - \alpha - 3)$. Gli autovalori sono quindi -1 con molteplicità algebrica 2 ed $\alpha + 3$ con molteplicità 1. Gli autospazi sono

$$V_{-1} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & \alpha + 2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 2 - \alpha \end{pmatrix} = \begin{cases} \langle (1, -1, 0), (2, 0, -1) \rangle & \text{se } k = 2 \\ \langle (1, -1, 0), \rangle & \text{se } k \neq 2 \end{cases};$$

$$V_{\alpha+3} = \ker \begin{pmatrix} -\alpha - 3 & 1 & \alpha \\ 1 & -\alpha - 3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -\alpha - 4 & 3 \end{pmatrix} = \langle (\alpha + 1, 3, \alpha + 4) \rangle.$$

c) Dai calcoli fatti, risulta quindi che A_α è diagonalizzabile solo per $\alpha = 2$, valore per il quale è del resto anche simmetrica.

d) Per $\alpha = 2$, gli autospazi V_{-1} e V_5 sono ortogonali perché la matrice è simmetrica. Per gli altri valori, il prodotto scalare $(1, -1, 0) \bullet (\alpha + 1, 3, \alpha + 4) = \alpha - 2$ non è mai nullo.

e) A_0 non è diagonalizzabile; una sua forma di Jordan è

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Per scrivere una matrice H che trasformi A_0 in J , cerchiamo un vettore $\mathbf{x}$ che soddisfi $A_0\mathbf{x} = -\mathbf{x} + \mathbf{v}$, dove $\mathbf{v}$ è un autovettore di autovalore -1 (che metteremo sulla prima colonna di H). Risolviamo quindi il sistema non omogeneo $(A_0 + I_3)X = (1, -1, 0)^T$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Se scegliamo la soluzione $(1, 0, -1)$ possiamo prendere

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

dove sull'ultima colonna abbiamo messo un autovettore di autovalore 3.

Esercizio 3 Si considerino i sottospazi $U = \langle(1, 0, 2), (1, 2, 0)\rangle$ e $W = \langle(1, -1, 1), (0, 1, 0)\rangle$ di $\mathbb{R}^3$.

- Determinare una base per gli spazi $U \cap W$ e $U + W$. La somma $U + W$ è diretta?
- Esiste un sottospazio T tale che $T \oplus U = T \oplus W = \mathbb{R}^3$? In caso affermativo, determinarne uno. È unico?
- Calcolare, se esiste un vettore $\mathbf{w}_0 \in W$ la cui proiezione ortogonale su U sia $p_U(\mathbf{w}_0) = (1, 0, 2)$.
- Determinare un sottospazio $S \leq \mathbb{R}^3$ di dimensione 1 in modo tale che, se p_S è la proiezione ortogonale su S , si abbia $p_S(U) \subseteq W$ e $p_S(W) \subseteq U$.
- Quanti sono i possibili sottospazi S che soddisfano la condizione precedente?

Svolgimento a) Affinché un vettore $a(1, -1, 1) + b(0, 1, 0) = (a, b - a, a) \in W$ stia in U occorre che

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ a & b - a & a \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & b - 2a \end{pmatrix} = 2.$$

Deve quindi essere $b = 2a$ e dunque $U \cap W = \langle(1, 1, 1)\rangle$. Dalla formula di Grassmann risulta allora che $\dim(U + W) = 3$ e quindi $U + W = \mathbb{R}^3$. Dato che $U \cap W \neq \{\mathbf{0}\}$, la somma non è diretta.

b) Dalla formula di Grassmann, risulta che un tale sottospazio T deve avere dimensione 1. T è allora il sottospazio generato da un qualsiasi vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ che non appartenga né ad U né a W . Ad esempio, possiamo prendere $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$, dato che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0; \quad \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Tale T non è unico: anche $T = \langle(0, 1, 0)\rangle$ andrebbe bene, come si verifica analogamente.

c) Ogni vettore si scrive in modo unico $\mathbf{w} = p_U(\mathbf{w}) + p_{U^\perp}(\mathbf{w})$. Siccome $U^\perp = \langle(2, -1, -1)\rangle$, dire che $p_U(\mathbf{w}) = (1, 0, 2)$ equivale a dire che $\mathbf{w} = (1, 0, 2) + \lambda(2, -1, -1) = (1 + 2\lambda, -\lambda, 2 - \lambda)$ appartiene a W . Stiamo quindi cercando per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ questo vettore è combinazione lineare dei generatori di W , cioè

$$rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 + 2\lambda & -\lambda & 2 - \lambda \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 3\lambda \end{pmatrix} = 2.$$

Pertanto $\lambda = \frac{1}{3}$ ed il vettore cercato è quindi $\mathbf{w}_0 = (1, 0, 2) + \frac{1}{3}(2, -1, -1) = (\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$.

[Si poteva anche procedere determinando, mediante il procedimento di Gram-Schmidt, una base ortonormale per $U = \langle \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 2), \frac{1}{\sqrt{30}}(2, 5, -1) \rangle$ e calcolando la proiezione del generico vettore di W

$$\begin{aligned} p_U(a, b - a, a) &= \frac{(a, b-a, a) \bullet (1, 0, 2)}{5} (1, 0, 2) + \frac{(a, b-a, a) \bullet (2, 5, -1)}{30} (2, 5, -1) \\ &= \frac{3a}{5} (1, 0, 2) + \frac{5b-4a}{30} (2, 5, -1) \end{aligned}$$

da cui risulta $a = \frac{5}{3}$ e $b = \frac{4}{3}$ per avere un vettore di proiezione $(1, 0, 2)$.]

d) Se $p_S(U) \subseteq W$ e $p_S(W) \subseteq U$, necessariamente la proiezione di $U \cap W$, che è contenuto in U (risp. in W) deve essere contenuta in W (risp. in U), cioè $p_S(U \cap W) \subseteq U \cap W$. Se poniamo $S = U \cap W = \langle (1, 1, 1) \rangle$, avremo che $p_S(U) = S \subseteq W$ (perché $(1, 1, 1) = p_S(1, 1, 1) \in U$) e $p_S(W) = S \subseteq U$ (idem).

e) $S = U \cap W$ è la sola scelta possibile. Sia infatti S un sottospazio che soddisfa le condizioni di d). La proiezione su S di qualsiasi vettore di $\mathbb{R}^3$ è per definizione un vettore di S , quindi $p_S(U) \subseteq S$ e, dato che $\dim S = 1$, si ha $p_S(U) = \{\mathbf{0}\}$ oppure $p_S(U) = S$. Inoltre, ogni vettore $\mathbf{u} \in U$ si scrive in modo unico come $\mathbf{u} = p_S(\mathbf{u}) + p_{S^\perp}(\mathbf{u})$, quindi $p_S(U) = \{\mathbf{0}\}$ se e solo se $U \subseteq S^\perp$. Dato che $\dim S = 1$, abbiamo che $\dim S^\perp = 2$. Siccome anche $\dim U = 2$, dire $U \subseteq S^\perp$ equivale a dire che $U = S^\perp$. Lo stesso dicasi per W .

Se avessimo che $p_S(U) = p_S(W) = \{\mathbf{0}\}$, ne ricaveremmo che $U = S^\perp = W$, e questo è assurdo. Quindi la proiezione di almeno uno tra U e W è uguale ad S . Supponiamo che sia $p_S(U) = S$ (il ragionamento è analogo se invece è $p_S(W) = S$). Sapendo che $p_S(U) \subseteq W$, concludiamo che

$$S = p_S(U) \subseteq W.$$

Dato che $S \subseteq W$, necessariamente $p_S(S) \subseteq p_S(W)$. D'altra parte $p_S(S) = S$. Quindi

$$S = p_S(S) \subseteq p_S(W) \subseteq U.$$

Quindi S è contenuto sia in U che in W da cui segue che $S \subseteq U \cap W$. Poiché $\dim S = \dim(U \cap W) = 1$, concludiamo che $S = U \cap W$.

Esercizio 4 In un fissato sistema di riferimento ortonormale $(\mathcal{R}; x, y, z)$, consideriamo la retta

$$r : \begin{cases} 2x + z = 2 \\ 3y - z = 3 \end{cases}.$$

- Scrivere equazioni cartesiane di tutte le rette dello spazio passanti per $P = (7, 4, 2)$ ed ortogonali ad r .
- Determinare la posizione reciproca di tali rette con la retta r .
- Scrivere le equazioni della retta r' passante per P e parallela ad r .
- Determinare i piani contenenti r' che distano $\frac{7}{\sqrt{2}}$ da r .
- Sia $(\mathcal{R}'; X, Y, Z)$ il sistema di riferimento ortonormale che ha orientamento opposto a quello di $\mathcal{R}$ ed in cui l'origine è il punto $Q_0(1, 1, 0)$, l'asse X è la retta r , orientata secondo le x crescenti ed il punto P ha coordinate $(0, 0, 7)$. Scrivere le equazioni di passaggio tra i due riferimenti.
- Scelto a piacere uno dei piani trovati al punto d), scriverne le equazioni nel sistema di riferimento $\mathcal{R}'$.

Svolgimento a) Sia π il piano ortogonale ad r e passante per P : le rette in questione sono quelle del fascio di rette passanti per P e contenute in π . Un vettore $\mathbf{v}$ parallelo ad r è ad esempio

$\mathbf{v} = (3, -2, -6)$. I piani ortogonali a $\mathbf{v}$ hanno equazione cartesiana $3x - 2y - 6z + d = 0$. L'equazione di π si determina imponendo il passaggio per P

$$\pi : 3x - 2y - 6z - 1 = 0.$$

Il fascio di rette cercato è intersezione di π con un qualsiasi fascio di piani passanti per P (e non paralleli a π). Ad esempio, i piani $y = 4$ ed $z = 2$ passano per P ed il fascio di rette ha equazione

$$\begin{cases} 3x - 2y - 6z - 1 = 0 \\ \lambda(y - 4) + \mu(z - 2) = 0 \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (\lambda, \mu) \neq (0, 0). \quad (2)$$

[Si poteva anche procedere osservando che la direzione delle rette cercate appartiene a $\mathbf{v}^\perp = \langle (2, 0, 1), (2, 3, 0) \rangle$. La retta per P di direzione $a(2, 0, 1) + b(2, 3, 0) = (2a + 2b, 3b, a)$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 7 + (2a + 2b)t \\ y = 4 + 3bt \\ z = 2 + at \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0)$$

da cui si ricavano le equazioni cartesiane (2) con la sostituzione $\lambda = a$ e $\mu = -3b$.

b) Poiché le rette trovate sono per ipotesi ortogonali ad r , potranno solo essere incidenti o sghembe. Il piano π è ortogonale ad r e quindi $\pi \cap r$ è un punto. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2x + z = 2 \\ 3y - z = 3 \\ 3x - 2y - 6z - 1 = 0 \end{cases}$$

troviamo $\pi \cap r = Q_0 = (1, 1, 0)$. Questo è il solo punto di intersezione possibile tra una delle nostre rette ed r . Pertanto c'è una sola retta incidente r , precisamente la retta per P e Q_0 , che ha direzione $P - Q_0 = (6, 3, 2)$, che per il calcolo precedente corrisponde quindi ad $a = 2, b = 1$ (quindi a $\lambda = 2, \mu = -3$). Tutte le altre rette sono sghembe con r .

c) Poiché sono rette parallele, le equazioni di r' differiscono da quelle di r solo per i termini noti, che si ricavano imponendo il passaggio per P :

$$r' : \begin{cases} 2x + z = 16 \\ 3y - z = 10 \end{cases}.$$

d) Siccome r ed r' sono parallele, i piani del fascio di asse r'

$$\sigma_{\alpha, \beta} : \alpha(2x + z - 16) + \beta(3y - z - 10) = 0$$

sono tutti paralleli ad r , perciò

$$d(r, \sigma_{\alpha, \beta}) = d(Q_0, \sigma_{\alpha, \beta}) = \frac{|\alpha(2 - 16) + \beta(3 - 10)|}{\sqrt{4\alpha^2 + 9\beta^2 + (\alpha - \beta)^2}} = \frac{7|2\alpha + \beta|}{\sqrt{5\alpha^2 - 2\alpha\beta + 10\beta^2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}$$

se e solo se

$$2(2\alpha + \beta)^2 = 5\alpha^2 - 2\alpha\beta + 10\beta^2$$

o ancora

$$3\alpha^2 + 10\alpha\beta - 8\beta^2 = 0. \quad (3)$$

L'equazione di secondo grado $3u^2 + 10u - 8 = 0$ ammette come soluzioni $u_1 = \frac{2}{3}$ ed $u_2 = -4$. Ne deduciamo (ponendo $u = \frac{\alpha}{\beta}$) che le soluzioni dell'equazione (3) sono (a meno di un fattore di proporzionalità) le coppie $(\alpha_1, \beta_1) = (2, 3)$ ed $(\alpha_2, \beta_2) = (4, -1)$. Quindi i piani per r' che distano $\frac{7}{\sqrt{2}}$ da r sono

$$\sigma_1 : 4x + 9y - z - 62 = 0; \quad \sigma_2 : 8x - 3y + 5z - 54 = 0.$$

e) Sia $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ la base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ associata ad $\mathcal{R}'$. Allora $\mathbf{v}_1$ è proporzionale alla direzione $(3, -2, -6)$ di r e la prima coordinata di $\mathbf{v}_1$ è positiva, visto che l'asse X è orientato secondo le x crescenti, quindi $\mathbf{v}_1 = (\frac{3}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{6}{7})$.

La direzione dell'asse Z è $P - Q_0 = (6, 3, 2)$, quindi $\mathbf{v}_3 = \pm(\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7})$, e si deve scegliere il segno $+$ affinché P abbia coordinate $(0, 0, 7)$ (e non $(0, 0, -7)$).

Infine, affinché l'orientamento sia concorde, avremo

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1 = (-\frac{2}{7}, \frac{6}{7}, -\frac{3}{7}).$$

Perciò le equazioni del cambiamento di riferimento sono:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \\ -6 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -6 \\ -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix}.$$

f) Sostituendo le espressioni di x, y, z in funzione di X, Y, Z nelle equazioni di σ_1, σ_2 possiamo ricavare le equazioni di questi piani in $\mathcal{R}'$. Possiamo anche procedere applicando la definizione originale: σ_1, σ_2 sono piani del fascio di asse la retta r' , che è parallela all'asse X passante per $(0, 0, 7)$ ed ha quindi equazioni $Y = Z - 7 = 0$. Le equazioni del fascio sono quindi

$$hY + k(Z - 7) = 0.$$

La distanza di un tale piano dall'origine è

$$\frac{|-7k|}{\sqrt{h^2 + k^2}}.$$

Imponendo che il quadrato di tale distanza sia pari a $\frac{49}{2}$ troviamo quindi:

$$2k^2 = h^2 + k^2 \quad \iff \quad h^2 - k^2 = (h - k)(h + k) = 0.$$

Pertanto i piani cercati hanno equazioni $Y + Z - 7 = 0$ ed $Y - Z - 7 = 0$.