CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA - LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE-TERRITORIO

Padova 15-06-2010

TEMA n.1

Parte 1. Quesiti preliminari.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata).

1) La proiezione ortogonale del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sul sottospazio $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ è nulla.

2) Le coordinate del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nella base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3) Ogni matrice ortogonale è invertibile.

Risposte

1) FALSO: la proiezione di un vettore v sul sottospazio U è nullla solo se $v \in U^{\perp}$, mentre $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$.

2) FALSO: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è il secondo vettore di $\mathcal{B}$ quindi le sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ sono $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3) VERO: una matrice A è ortogonale se soddisfa la relazione $A^T A = I$, quindi A è invertibile e la sua inversaè A^T.

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1. Si considerino la matrice A_α dipendente dal parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ ed i seguenti vettori:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \alpha+1 \\ 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+1 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

a) Determinare nucleo e immagine di A_α al variare del parametro α.

b) Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ i vettori assegnati hanno la stessa immagine mediante A_α.

c) Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice A_α è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$ e per i valori trovati determinare una base di autovettori.

d) Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice A_α è ortogonalmente diagonalizzabile?

e) Esistono valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la matrice A_α sia simile ad una matrice ortogonale?

f) Scelto a piacere un valore di $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}$ tale che la matrice abbia un unico autovalore, determinare la forma di Jordan J di $A_{\bar{\alpha}}$ ed una matrice H tale che $H^{-1}A_{\bar{\alpha}}H = J$.

g) Posto $\alpha = i \in \mathbb{C}$, deteminare gli autospazi in $\mathbb{C}^4$ della matrice A_i.

Svolgimento. Poiché $\det(A_\alpha) = \alpha^6$, la matrice è invertibile per ogni $\alpha \neq 0$, quindi per tali valori $\ker A_\alpha = \{\mathbf{0}\}$ e $\operatorname{Im} A_\alpha = \mathbb{R}^4$. D'altra parte la riduzione in forma a scala di

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ottenuta con un semplice scambio di righe, dà immediatamente $\ker A_0 = \operatorname{Im} A_0 =< \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 >$.

L'immagine dei due vettori assegnati è rispettivamente:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \alpha+1 \\ 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+1 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha+2 \\ 0 \\ 0 \\ 2\alpha \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \alpha+1 \\ 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+1 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha+2 \\ 0 \\ -\alpha^2 \\ 2\alpha \end{pmatrix}$$

perciò i due vettori hanno la stessa immagine solo per $\alpha = 0$. Del resto, che i vettori non potessero avere la stessa immagine per ogni α era evidente, dato che per $\alpha \neq 0$ l'applicazione è un isomorfismo, e due vettori distinti non possono avere la stessa immagine.

Il polinomio caratteristico di A_α è:

$$p_\alpha(t) = \det \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \alpha+1 \\ 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+1 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = (\alpha - t)^2(\alpha^2 - t)^2.$$

Per $\alpha \neq \alpha^2$, cioé per $\alpha \neq 0, 1$, abbiamo due autovalori distinti di molteplicità algebrica 2. Per tali α le molteplicità geometriche sono:

$$m_g(\alpha) = 4 - \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha+1 \\ 0 & \alpha^2-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+1 & \alpha^2-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \alpha \neq -1 \\ 2 & \alpha = -1 \end{cases};$$

$$m_g(\alpha^2) = 4 - \operatorname{rg} \begin{pmatrix} \alpha-\alpha^2 & 0 & 0 & \alpha+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-\alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \alpha \neq -1 \\ 2 & \alpha = -1 \end{cases}.$$

Siccome per $\alpha = 0$ (risp. $\alpha = 1$) la matrice ammette il solo autovalore 0 (risp. 1) con molteplicità algebrica 4 e, non essendo già diagonale, non può essere diagonalizzabile, concludiamo che A_α è diagonalizzabile solo per $\alpha = -1$. Questo è pure l'unico caso per cui A_α è simmetrica e dunque ortogonalmente diagonalizzabile.
Dato che per A_{-1} è già diagonale, una base di autovettori sarà data da vettori della base canonica (quindi già ortonormale): per autospazi $V_{-1} =< \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4 >$ e $V_1 =< \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 >$.

I soli numeri reali che possono essere autovalori di una matrice ortogonale sono 1 e -1; poiché gli autovalori di A_α sono α ed α^2, dovremo avere $\alpha = \pm 1$. Le colonne di A_{-1} sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$, quindi questa è una matrice ortogonale.

Meno evidente (ma non era richiesto!) è dimostrare che $\alpha = -1$ è l'unico valore per cui A_α è simile aduna matrice ortogonale. L'unico altro valore possibile è $\alpha = 1$, e in questo caso sappiamo che A_1 non è diagonalizzabile. D'altra parte, se M è una matrice *ortogonale* 4×4 con unico autovalore 1 di molteplicità algebrica 4 e geometrica 2; scegliendo una base ortonormale $\mathcal{B}$ i cui primi due vettori sono autovettori di M, vediamo che M è ortogonalmente simile ad una matrice del tipo:

$$N = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{array}\right).$$

Siccome abbiamo fatto un cambiamento di base ortonormale, la matrice $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è ancora ortogonale, dunque è la matrice di una isometria in $\mathbb{R}^2$. Dato che M ha solo l'autovalore 1, la P deve avere autovalore 1 di molteplicità algebrica 2: dalla classificazione delle isometrie di $\mathbb{R}^2$, risulta (ad esempio prendendo la traccia) che $P = I_2$, dunque M è diagonalizzabile, e non può allora essere simile ad A_1.

Dato che gli autovalori di A_α sono α e α^2, la matrice ha un solo autovalore solo se $\alpha^2 = \alpha$, cioè $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$.
Per $\alpha = 0$, calcoliamo l'autospazio:

$$V_0(0) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Avremo quindi due blocchi di autovalore zero. Inoltre il quadrato della matrice $A_0 - 0I_4 = A_0$ è $A_0^2 = \mathbf{0}$ perció ilnumero di blocchi di dimensione 1 è

$$-\dim\ker I_4 + 2\dim\ker A_0 - \dim\ker \mathbf{0} = -0 + 4 - 4 = 0$$

quindi la forma di Jordan di A_0 ha due blocchi di dimensione 2.
La seconda e quarta colonna di H saranno vettori indipendenti di $\mathbb{R}^4$ non appartenenti a $\ker A_0$, per esempio $\mathbf{e}_2$ ed $\mathbf{e}_4$. Il primo e terzio vettore di H saranno allora rispettivamente $A_0\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$ e $A_0\mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_1$ quindi

$$J = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right); \qquad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il caso $\alpha = 1$ si tratta allo stesso modo; i risultati sono in questo caso:

$$V_1(1) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle; \quad J = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right); \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di A_i sono i e -1. Troviamo

$$V_i(i) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i+1 \\ 0 & -1-i & 0 & 0 \\ 0 & i+1 & -1-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle;$$

$$V_i(-1) = \ker \begin{pmatrix} i+1 & 0 & 0 & i+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i+1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Esercizio 2. Si considerino i sottospazi $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ e $W = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ di $\mathbb{R}^3$:

a) calcolare la proiezione ortogonale del sottospazio $U^\perp \cap W^\perp$ sul sottospazio $(U+W)^\perp$;

b) determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che si abbia $p_U(v) = p_W(v)$.

c) Sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare $g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x+y \\ x+y \end{pmatrix}$. Determinare, se esiste, un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g = 0$ nonché:

$$p_U \circ f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad p_W \circ f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} f.$$

Svolgimento. Calcoliamo prima i sottospazi ortogonali:

$$U^\perp = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle; \qquad W^\perp = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle; \qquad (U+W)^\perp = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle^\perp = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Un semplice calcolo mostra poi che $U^\perp \cap W^\perp = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = (U+W)^\perp$ (in effetti, la relazione $U^\perp \cap W^\perp = (U+W)^\perp$ vale per una qualsiasi coppia di sottospazi di $\mathbb{R}^n$). Dunque:

$$p_{(U+W)^\perp}\left(U^\perp \cap W^\perp\right) = p_{(U+W)^\perp}\left((U+W)^\perp\right) = (U+W)^\perp.$$

Per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^3$ si ha, per definizione, che $p_U(v) \in U$ e $p_W(v) \in W$. Pertanto, se $p_U(v) = p_W(v)$ deve essere $p_U(v) = p_W(v) \in U \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Siccome $\ker p_U = U^\perp$ e $\ker p_W = W^\perp$, si deve avere che $v \in U^\perp \cap W^\perp$. I vettori v cercati sono quindi tutti e soli i multipli di $(1,1,1)^T$.

La matrice di g rispetto alle basi canoniche, il suo nucleo e la sua immagine sono:

$$M(g, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \ker g = \{\mathbf{0}\}; \qquad \operatorname{Im} g = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Affinché $f \circ g = 0$ occorre che $\operatorname{Im} g \subseteq \ker f$. È evidente che $\mathbf{e}_1 \notin \operatorname{Im} g$, quindi $\mathbb{R}^3 = \langle \mathbf{e}_1 \rangle \oplus \operatorname{Im} g$. Un'applicazione lineare f è determinata dai suoi valori su una base; dovendo f mandare i vettori di $\operatorname{Im} g$ sul vettore nullo, f è completamente determinata da $f(\mathbf{e}_1)$.
La prima condizione su $f(\mathbf{e}_1)$ dice che:

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + U^\perp \iff f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ -1+\alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

per opportuni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. la proiezione su W di quest'ultimo vettore è:

$$p_W \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ -1+\alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 1+\alpha \\ -1+\alpha \\ \beta \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{\alpha - \beta - 1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Confrontando con la condiszione assegnata su $p_W(f(\mathbf{e}_1))$ troviamo che $\alpha - \beta - 1 = 2$, cioè $\alpha = \beta + 3$, dunque

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta+4 \\ \beta+2 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Siccome $\operatorname{Im} f = \langle f(\mathbf{e}_1) \rangle$, determiniamo β imponendo l'ultima condizione:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \langle \begin{pmatrix} \beta+4 \\ \beta+2 \\ \beta \end{pmatrix} \rangle \qquad \Longleftrightarrow \qquad \beta = 0.$$

Pertanto f è univocamente individuata dalle condizioni:

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad f \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Si consideri, al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$, la varietà lineare $S_\gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ \gamma \\ 2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\gamma \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

a) Per ogni $\gamma \in \mathbb{R}$ determinare un sistema lineare che abbia S_γ come insieme di soluzioni.

b) Determinare $\cap_{\gamma \in \mathbb{R}} S_\gamma$.

c) Stabilire per quali valori di γ l'insieme S_γ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e determinare $\langle S_\gamma \rangle$ al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$.

d) Per ogni $\gamma \in \mathbb{R}$ determinare un sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^3$ tale che $\langle S_\gamma \rangle \oplus U = \mathbb{R}^3$.

Svolgimento. Si riconosce subito che $\dim S_\gamma = 2$ se $\gamma \neq -1$ mentre $\dim S_{-1} = 1$. Nel primo caso quindi la varietà lineare è un piano, nel secondo una retta. Per $\gamma \neq -1$ un'equazione cartesiana è

$$\det \begin{pmatrix} x-2 & y-\gamma & z-2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\gamma & 1 \end{pmatrix} = (1+\gamma)(x-2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad S_\gamma : x = 2$$

(si poteva anche osservare subito che S_γ è parallelo al piano $x = 0$).

Nel caso $\gamma = -1$, equazioni cartesiane si trovano eliminando il parametro dall'equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 2 \\ y - z = -3. \end{cases}$$

Gli S_γ quindi coincidono col piano $x = 2$, se $\gamma \neq -1$ ed S_{-1} è una retta contenuta nel piano $x = 2$, perciò l'intersezione di tutti gli S_γ è proprio la retta S_{-1}.

Il piano $x = 2$ non passa per l'origine, quindi S_γ non è sottospazio per nessun $\gamma \in \mathbb{R}$.
Per $\gamma \neq -1$, il sottospazio generato da S_γ contiene tutti i punti di questo piano ed un vettore fuori da esso, congiungente l'origine con un punto qualsiasi del piano. Perciò $\langle S_\gamma \rangle = \mathbb{R}^3$ per $\gamma \neq -1$, e l'unico sottospazio in somma diretta con $\langle S_\gamma \rangle$ è il sottospazio banale $U = \{\mathbf{0}\}$.
Per $\gamma = -1$ invece, per definizione

$$S_{-1} = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Un sottospazio in somma diretta con $\langle S_{-1} \rangle$ sarà quindi $U = \langle u \rangle$ per un qualsiasi $u \notin \langle S_{-1} \rangle$, ad esempio $u = \mathbf{e}_3$.

Esercizio 4. Nello spazio euclideo $\mathbb{A}^3$ si considerino il vettore $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e la retta r di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1. \end{cases}$

a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente la retta r e parallelo al vettore v.

b) Determinare equazioni cartesiane di una retta t contenuta nel piano π, ortogonale ad r e passante per il punto P.

c) Determinare equazioni cartesiane delle rette s_1, s_2, sul piano π, bisettrici degli angoli formati dalle rette r e t.

d) Determinare equazioni cartesiane delle rette s_1, s_2 in un sistema di riferimento euclideo (X, Y, Z) in cui l'asse X sia la retta r e l'asse Y sia la retta t.

Svolgimento. Le equazioni cartesiane del piano π si ricavano faclmente da quelle parametriche:

$$\pi : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \iff z = 1.$$

La direzione ortogonale ad r parallela a π si trova ortonormalizzando con Gram-Schmidt la giacitura di π:

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

La retta t è allora

$$\begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 2 + \mu \\ z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = -1 \\ z = 1. \end{cases}$$

Essendo per ipotesi ortogonali e complanari, le rette r e t si intersecano in un punto che troviamo mettendo a sistema le equazioni delle due rette: $Q = r \cap t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Le bisettrici s_1 ed s_2 passano dunque per Q. Possiamo determinare graficamente s_1 come la retta per Q e per il punto Q' ottenuto sommando a Q un vettore parallelo ad r e poi un vettore parallelo a t aventi la stessa norma, per esempio:

$$Q' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad s_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \begin{cases} y = \frac{3}{2} \\ z = 1. \end{cases}$$

Ricaviamo poi s_2 come retta per Q ortogonale a s_1 e contenuta in π:

$$s_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ z = 1. \end{cases}$$

Del resto, essendo r e t le parallele alle bisettrici degli assi del piano $z = 0$, le rette s_1 ed s_2 devono essere parallele agli assi coordinati.

Le bisettrici degli assi del sistema (X, Y, Z) hanno equazioni:

$$\ell_1 : \begin{cases} X + Y = 0 \\ Z = 0 \end{cases} ; \qquad \ell_2 : \begin{cases} X - Y = 0 \\ Z = 0. \end{cases}$$

Le rette s_1 ed s_2 coincidono con queste, ma l'ordine non viene specificato (del resto l'orientamento del riferimento (X, Y, Z) non viene specificato), dunque si potrà avere $s_1 = \ell_1$ ed $s_2 = \ell_2$ oppure $s_1 = \ell_2$ ed $s_2 = \ell_1$.