LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTE-TERRITORIO
Corso di Matematica 2
Padova 15-12-2006
Soluzioni del TEMA n.1

Esercizio 1 Si consideri la funzione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ definita da $f_a(X) = AX$ dove

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 0 & a \\ 1 & a & a \end{pmatrix}.$$

a) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare f_a risulta suriettiva?

b) Si calcoli la controimmagine di $(1, 2, a)$.

c) Sia $U = \langle(1, 0, -1), (0, 1, -1)\rangle$. Per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha $\dim f_a(U) = \dim U$?

d) Calcolare la proiezione ortogonale di $(1, 2, 0)$ sull'immagine di f_0.

e) Nei casi in cui $f_a^{-1}(1, 2, a) = \varnothing$, determinare un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tale che $f_a(\mathbf{v})$ abbia distanza minima da $(1, 2, a)$.

Svolgimento Poiché $\det A = -2a(a - 1)$, la funzione è un isomorfismo (e, in particolare, suriettiva) per $a \neq 0, 1$.
Per calcolare $f_a^{-1}(1, 2, a)$ dobbiamo risolvere il sistema $AX = (1, 2, a)^T$. Dalla riduzione in forma a scala della matrice completa del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 2 & 0 & a & 2 \\ 1 & a & a & a \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & -2a & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & a-1 \end{array}\right)$$

risulta

$$f_a^{-1}(1, 2, a) = \begin{cases} \varnothing & a = 0 \\ (1, 0, 0) + \langle(1, 1, -2)\rangle & a = 1 \\ (\frac{2-a}{2}, \frac{a-2}{2a}, 1) & a \neq 0, 1 \end{cases}.$$

Siccome f_a è un isomorfismo per $a \neq 0, 1$, per questi valori sicuramente $\dim f_a(U) = \dim U$. Poiché $f_a(U)$ è generato dalle immagini dei suoi generatori, per $a = 0, 1$ troviamo

$$f_0(U) = \langle(0, 2, 1), (-1, 0, 0)\rangle; \qquad f_1(U) = \langle(0, 1, 0)\rangle.$$

Determiniamo una base ortonormale di $\operatorname{Im} f_0 = \langle(1, 2, 1), (1, 0, 0)\rangle$ mediante il procedimento di Gram-Schmidt:

$$\begin{aligned} &\mathbf{w}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1). \\ &\mathbf{w}_2' = (1, 0, 0) - \tfrac{1}{6}(1, 2, 1) = (\tfrac{5}{6}, -\tfrac{2}{6}, -\tfrac{1}{6}); \\ &\mathbf{w}_2 = \tfrac{1}{\sqrt{30}}(5, -2, -1). \end{aligned} \qquad (*)$$

Pertanto la proiezione ortogonale di $(1, 2, 0)$ si $\operatorname{Im} f_0$ è

$$\frac{(1, 2, 0) \bullet (1, 2, 1)}{\|(1, 2, 1)\|^2}(1, 2, 1) + \frac{(1, 2, 0) \bullet (5, -2, -1)}{\|(5, -2, -1)\|^2}(5, -2, -1) = (1, \frac{8}{5}, \frac{4}{5}). \qquad (**)$$

Questa proiezione è il vettore di $\operatorname{Im} f_0$ più vicino a $(1, 2, 0)$. Quindi i vettori $\mathbf{v}$ tali che $f_0(\mathbf{v})$ ha distanza minima da $(1, 2, 0)$ sono i vettori di $f_0^{-1}(1, \frac{8}{5}, \frac{4}{5})$. Questi possiamo determinarli tutti risolvendo il sistema lineare. In alternativa, osserviamo che dalle formule $(*)$ e $(**)$ risulta

$$(1, \frac{8}{5}, \frac{4}{5}) = \frac{5}{6}(1, 2, 1) + \frac{1}{30}(5, -2, -1) = \frac{4}{5}(1, 2, 1) + \frac{1}{5}(1, 0, 0)$$

quindi $\mathbf{v} = \frac{4}{5}(1, 0, 0) + \frac{1}{5}(0, 0, 1) = (\frac{4}{5}, 0, \frac{1}{5})$ certamente appartiene ad $f_0^{-1}(1, \frac{8}{5}, \frac{4}{5})$.

Esercizio 2 In $M_3(\mathbb{R})$ siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Per ciascuna di queste matrici, determinare, se esiste, una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori.

b) Per ciascuna di queste matrici, determinare, se esiste, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori.

c) Trovare, se esiste, una matrice H tale che $H^{-1}AH = C$ oppure $H^{-1}BH = C$.

Svolgimento Calcolando, troviamo che le tre matrici hanno lo stesso polinomio caratteristico

$$p(t) = -(t+1)(t-1)^2.$$

Determiniamo poi la molteplicità geometrica dell'autovalore 1 per le tre matrici:

$$m_{g,A}(1) = 3 - rg \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1; \qquad m_{g,B}(1) = 3 - rg \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

mentre è ovvio che $m_{g,C}(1) = 1$ dato che C è una matrice di Jordan. Quindi A e C sono simili (C è la forma di Jordan di A) mentre B è diagonalizzabile (visto che $1 \leq m_{g,B}(-1) \leq m_{a,B}(-1) = 1$). Solo B ammette dunque una base di autovettori. Per determinarli, calcoliamo

$$V_{1,B} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle; \quad V_{-1,B} = \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (0,1,-1) \rangle.$$

Una base di autovettori per B è dunque data da $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,1,-1)\}$. Poiché B non è simmetrica, non esiste una base ortonormale di autovettori. Gli autospazi di A sono

$$V_{1,A} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (2,1,0) \rangle; \quad V_{-1,A} = \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \langle (0,1,0) \rangle.$$

Per scrivere la matrice del cambiamento di base che trasforma A nella sua forma di Jordan C, dobbiamo trovare una vettore X tale che $AX = X + (2,1,0)^T$, cioé dobbiamo risolvere

$$(A - I)X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'insieme delle soluzioni di questo sistema è $(0,0,1) + \langle (2,1,0) \rangle$, quindi la matrice cercata è

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3 In un fissato sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, si considerino le rette

$$r_a : \begin{cases} x = 1 + a + 2t \\ y = -1 - 3at \\ z = 1 + a + 6t \end{cases} \quad \text{e} \quad s_a : \begin{cases} x = 1 + 2at' \\ y = -1 - a - 3t' \\ z = 1 + 6at' \end{cases} .$$

a) Si dica per quali valori del parametro reale a sono complanari.

b) Nel caso in cui sono parallele, si determini un'equazione cartesiana del piano che le contiene.

c) Determinare, se esiste, una retta ℓ che interseca le coppie di rette $\{r_\alpha, s_\alpha\}$ ed $\{r_\beta, s_\beta\}$ per due valori $a = \alpha$ ed $a = \beta$ del parametro.

d) Sia $\mathcal{R}'$ il sistema di riferimento in cui l'asse X è la retta r_0 e l'asse Y è la retta s_0 e che ha lo stesso orientamento di $\mathcal{R}$. Scrivere le equazioni del cambiamento di riferimento da $\mathcal{R}'$ ad $\mathcal{R}$.

Svolgimento Per verificare quando le rette sono complanari, scegliamo $R_a(1+a, -1, 1+a) \in r_a$ ed $S_a(1, -1-a, 1) \in s_a$ e formiamo il vettore $R_a - S_a = (a, a, a)$: le rette sono complanari se questo vettore è linearmente dipendente dalle direzioni $(2, -3a, 6)$ di r_a e $(2a, -3, 6a)$ di s_a, cioè se

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -3a & 6 \\ 2a & -3 & 6a \\ a & a & a \end{pmatrix} = -12a(a^2 - 1) = 0,$$

vale a dire quando $a = 0, \pm 1$. Per $a = 1$ le rette sono parallele (direzione $(2, -3, 6)$), così come per $a = -1$ (direzione $(2, 3, 6)$), mentre per $a = 0$ si intersecano in $R_0 = S_0 = (1, -1, 1)$.
Il piano π_1 contenente r_1 ed s_1 è parallelo alle direzioni $(2, -3, 6)$ ed $R_1 - S_1 = (1, 1, 1)$ e passa per $R_1 = (2, -1, 2)$. Una sua equazione cartesiana è quindi

$$\pi_1 : \det \begin{pmatrix} x-2 & y-1 & z-2 \\ 2 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 9x - 4y - 5z - 12 = 0.$$

Allo stesso modo si trova il piano π_{-1} contenente r_{-1} ed s_{-1} come piano parallelo ad $(2, 3, 6)$ ed $R_{-1} - S_{-1} = (-1, -1, -1)$ e passante per $R_{-1} = (0, -1, 0)$; una sua equazione cartesiana è

$$\pi_{-1} : 3x - 4y + z - 4 = 0.$$

La retta $\ell = \pi_1 \cap \pi_{-1}$ non è parallela ad r_1 ed s_1 (perché $(2, -3, 6)$ non è parallelo a π_{-1}) né ad r_{-1} ed s_{-1} ($(2, 3, 6)$ non è parallelo a π_1) e per costruzione è complanare con queste quattro rette, quindi le interseca tutte e quattro.
Abbiamo già visto che r_0 ed s_0 si intersecano in $R_0 = (1, -1, 1)$; inoltre $(2, 0, 6) \bullet (0, -3, 0) = 0$, quindi le rette sono tra loro ortogonali. $\mathcal{R}'$ è dunque un sistema di riferimento ortogonale. I primi due vettori della base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ associata ad $\mathcal{R}'$ si ottengono dividendo le direzioni di r_0 ed s_0 per la loro norma, e sono quindi $\frac{1}{\sqrt{10}}(1, 0, 3)$ e $(0, -1, 0)$. Poiché $\mathcal{R}'$ ha lo stesso orientamento di $\mathcal{R}$, il terzo vettore si trova calcolando il prodotto vettoriale

$$\frac{1}{\sqrt{10}}(1, 0, 3) \times (0, -1, 0) = \frac{1}{\sqrt{10}}(3, 0, -1).$$

Le equazioni del cambiamento di riferimento sono quindi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4 Si semplifichi il numero complesso $z = \frac{(\sqrt{3}+i)^9}{\sqrt{2}(1+i)^{17}} \in \mathbb{C}$.

a) Si scriva una equazione $x^2 + ax + b = 0$, con $a, b \in \mathbb{R}$, soddisfatta da z.

b) Scrivere, se esiste, una matrice simmetrica $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ che abbia z come autovalore.

c) A è la matrice di una isometria?

Svolgimento Scriviamo in notazione esponenziale numeri di cui dobbiamo calcolare le potenze:

$$\sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}};$$

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Ricordando che $(\rho e^{i\vartheta})^n = \rho^n e^{i(n\vartheta)}$, ed osservando che $\frac{17}{4}\pi = \frac{\pi}{4} + 4\pi$, troviamo quindi

$$z = \frac{2^9 e^{i\frac{3\pi}{2}}}{2^9 e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i(\frac{3}{2}-\frac{1}{4})\pi} = e^{i\frac{5}{4}\pi} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Per scrivere un polinomio reale di grado 2 che abbia z come radice, basta osservare che

$$(x - z)(x - \bar{z}) = x^2 - (z + \bar{z})x + z\bar{z}$$

è a coefficienti reali. Nel nostro caso $\bar{z} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ quindi il polinomio cercato è $x^2 + \sqrt{2}x + 1$. La notazione $z = \cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi$ (e la domanda c)) suggerisce di prendere A come la matrice della rotazione di angolo $\frac{5}{4}\pi$:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\frac{5}{4}\pi & -\sin\frac{5}{4}\pi \\ \sin\frac{5}{4}\pi & \cos\frac{5}{4}\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

In particolare, A è la matrice di una isometria.