CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE - TERRITORIO
Padova 16-06-09
TEMA n.1

Parte 1. Quesiti preliminari.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta. Qualora non si risponda in maniera corretta e ben motivata ad almeno 2 di questi 3 quesiti il compito verrà considerato gravemente insufficiente e non verrà corretto il resto dell'elaborato.

a) Siano dati due vettori non nulli $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ di uno spazio vettoriale V. La somma dei due sottospazi $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >$ e $< \mathbf{v}_1 >$ è diretta, cioè vale $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 > \oplus < \mathbf{v}_1 >$.

b) Ogni endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è un isomorfismo.

c) Date due rette nello spazio $\mathbb{A}^3$, esiste sempre almeno una retta ortogonale ed incidente entrambe.

Risposte.

a) FALSO: $\mathbf{v}_1 \in < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >$ quindi $\mathbf{0} \neq \mathbf{v}_1 \in < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 > \cap < \mathbf{v}_1 >$.

b) FALSO: l'applicazione nulla $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ e non è un isomorfismo.

c) VERO: se le rette sono sghembe, è la retta di minima distanza; se sono parallele o coincidenti ce ne sono infinite (una qualsiasi retta ortogonale e complanare ad una delle due interseca anche l'altra); se sono incidenti, è la retta ortogonale al piano contenente le due rette e passante per il punto di intersezione delle due rette.

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1. Siano dati il sottospazio $W =< (1, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 0) >$ di $\mathbb{R}^4$ ed i vettori $\mathbf{v}_1 = (2, 2, 3, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (1, -1, 0, 1)$.

a) Si dicano quali tra i vettori $\mathbf{v}_i$ con $i \in \{1, 2, 3\}$ verificano

$$\dim(W+ < \mathbf{v}_i >) = 2.$$

b) Si dicano quali tra i tre vettori sono in somma diretta con W, cioè verificano

$$W \oplus < \mathbf{v}_j > .$$

c) Determinare base e dimensione di $(W+ < \mathbf{v}_1 >) \cap (W+ < \mathbf{v}_2 >)$.

d) Determinare base e dimensione di $(W+ < \mathbf{v}_2 >) + (W+ < \mathbf{v}_3 >)$.

Svolgimento. Le risposte dipendono dalla dipendenza lineare dei cinque vettori assegnati:

$$P = I_3; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}; \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $\mathbf{v}_1 \in W$ (come si poteva osservare direttamente, risparmiandosi il conto precedente), dunque $W+ < \mathbf{v}_1 >= W$ ha dimensione 2. In particolare la somma $W+ < \mathbf{v}_1 >$ non è diretta.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi $\mathbf{v}_2 \notin W$ e $\dim (W+ < \mathbf{v}_2 >) = 3$. In particolare la somma $W+ < \mathbf{v}_2 >$ è diretta.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \; L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi $\mathbf{v}_3 \notin W$ e $\dim (W+ < \mathbf{v}_3 >) = 3$. In particolare la somma $W+ < \mathbf{v}_3 >$ è diretta.
Poiché $W+ < \mathbf{v}_1 >= W$ mentre $W+ < \mathbf{v}_2 >$ è diretta, abbiamo

$$(W+ < \mathbf{v}_1 >) \cap (W+ < \mathbf{v}_2 >) = W \cap (W+ < \mathbf{v}_2 >) = W$$

che ha dimensione 2 e base $\{(1,1,1,1),(1,1,0,0)\}$.
Il sottospazio $(W+ < \mathbf{v}_2 >) + (W+ < \mathbf{v}_3 >)$ è generato dalla base di W e dai vettori $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$. Dobbiamo quindi studiare la dipendenza lineare di questi quattro vettori, con una riduzione a scala come sopra oppure osservando che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -(2) + (1+0) = -1 \neq 0$$

(tutti i determinanti sono stati sviluppati secondo l'ultima colonna). I quattro vettori sono dunque linearmente indipendenti, perció $(W+ < \mathbf{v}_2 >) + (W+ < \mathbf{v}_3 >) = \mathbb{R}^4$. Come base, possiamo scegliere i quattro vettori dati, oppure una qualsiasi base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 2.

a) Determinare un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, scrivendo esplicitamente $L(x,y,z)$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, tale che $\operatorname{Ker}(L) =< (1,1,1) >$ e $\operatorname{Im}(L) =< (1,0,0),(0,0,1) >$.

b) Si calcoli la matrice $M(L; \mathcal{B}, \mathcal{E})$ di L rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,0,0),(0,0,1)\}$ del dominio ed alla base canonica $\mathcal{E}$ del codominio.

c) Tra gli endomorfismi L soddisfacenti le condizioni di (a) determinarne, se esiste, uno con autovalori: $0, 1$ e 512. È unico?

d) Tra gli endomorfismi L soddisfacenti le condizioni di (a) determinarne, se esiste, uno diagonalizzabile con autovalori: 0 e 1. È unico?

e) Tra gli endomorfismi L soddisfacenti le condizioni di (a) determinarne, se esiste, uno NON diagonalizzabile con autovalori: 0 e 1. È unico?

Svolgimento. I generatori di $\operatorname{Im} L$ sono indipendenti (vettori della base canonica) ed $(1,1,1)$ non è una loro combinazione lineare (seconda coordinata non nulla). Quindi i vettori di $\mathcal{B}$ formano effettivamente una base di $\mathbb{R}^3$. Un'applicazione lineare L è quindi univocamente determinata dai suoi valori nei vettori di $\mathcal{B}$. Certamente deve essere $L(1,1,1) = (0,0,0)$, mentre gli altri due dovranno andare un vettori indipendenti (per avere $\dim \operatorname{Im} L = 2$). La soluzione più semplice è $L(1,0,0) = (1,0,0)$ ed $L(0,0,1) = (0,0,1)$. Questo basta già per scrivere

$$M(L; \mathcal{B}, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Siccome $(0,1,0) = (1,1,1) - (1,0,0) - (0,0,1)$, per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ avremo

$$\begin{aligned} (x,y,z) &= x(1,0,0) + y[(1,1,1) - (1,0,0) - (0,0,1)] + z(0,0,1) \\ &= y(1,1,1) + (x-y)(1,0,0) + (z-y)(0,0,1). \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} L(x,y,z) &= yL(1,1,1) + (x-y)L(1,0,0) + (z-y)L(0,0,1) \\ &= (x-y)(1,0,0) + (z-y)(0,0,1) \\ &= (x-y, 0, z-y). \end{aligned}$$

[In alternativa si poteva scrivere la matrice del cambiamento di base

$$M(id, \mathcal{E}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ricavando $M(L; \mathcal{E}, \mathcal{E}) = M(L; \mathcal{B}, \mathcal{E}) M(id; \mathcal{E}, \mathcal{B})$. Si ricava $L(x,y,z)$ moltiplicando $M(L; \mathcal{E}, \mathcal{E})$ per la colonna (x,y,z).]

Come già osservato, tutti gli endomorfismi che soddisfano le condizioni di (a) sono determinati dai valori in $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$ (oltre che da $L(1,1,1) = (0,0,0)$). Esplicitamente, l'endomorfismo è determinato dalle coordinate dei vettori $L(1,0,0)$ e $L(0,0,1)$ rispetto alla base $\{(1,0,0),(0,0,1)\}$ di $\operatorname{Im}(L)$:

$$L(1,0,0) = a(1,0,0) + b(0,0,1); \qquad L(0,0,1) = c(1,0,0) + d(0,0,1).$$

La matrice di L rispetto alla base $\mathcal{B}$ è allora

$$M(L; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{pmatrix}$$

Un endomorfismo che soddisfa le condizioni di (c) si trova, ad esempio, ponendo $a = 1$, $b = 0$ (così $(1,0,0)$ è autovettore di autovalore 1) nonché $c = 0$ e $d = 512$ (così $(0,0,1)$ è autovettore di autovalore 512). Non è unico: potevo prendere $a = 512$, $b = c = 0$ e $d = 1$, che è diverso (valori diversi in $(1,0,0)$) ma ha gli stessi autovalori.

Analogamente, un endomorfismo che soddisfa le condizioni di (d) si trova ponendo $a = d = 1$ e $c = b = 0$. Questo è unico: dovendo L essere diagonalizzabile, bisogna che $\operatorname{Im} L$ sia l'autospazio di autovalore 1, quindi L non può che essere l'identità sul sottospazio $< (1,0,0),(0,0,1) >$.

Per trovare un endomorfismo che soddisfa le condizioni di (e), possiamo prendere $a = c = d = 1$ e $b = 0$ (facciamo cioé in modo che la $M(L; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ sia una matrice di Jordan). Non è unico, potrei ad esempio prendere la trasposta della matrice precedente, ossia scegliere $a = b = d = 1$ e $c = 0$.

Esercizio 3. Sia $p_U : \mathbb{R}^3 \to U$ la proiezione ortogonale sul sottospazio

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0\}.$$

a) Determinare le immagini $p_U(T_1)$ e $p_U(T_2)$ delle seguenti varietà lineari

$$T_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{array} \right.\right\}, \quad T_2 = (0, 2, -1) + < (-1, 1, 1) > .$$

b) Si considerino le varietà lineari

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left\{ \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x - 1 = 0 \end{array} \right.\right\}, \quad U' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 3\}.$$

Si osservi che $S \subset U$. Determinare una varietà lineare $S' \subseteq U'$ la cui proiezione ortogonale su U sia S, cioé $p_U(S') = S$.

[Suggerimento: può essere utile tradurre il problema in termini geometrici.]

c) Calcolare la distanza tra le varietà lineari S e S'.

Svolgimento. Come al solito, converrà calcolare le proiezioni su $U^\perp =< \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1) >$ e ricavare le proiezioni su U per differenza: $p_U(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - p_{U^\perp}(\mathbf{v})$.
Risolvendo il sistema lineare che definisce T_1 troviamo

$$T_1 = \{(x, -1, -x + 1),\ x \in \mathbb{R}\} = (0, -1, 1) + < (1, 0, -1) > .$$

Allora

$$p_{U^\perp}(x, -1, -x + 1) = \frac{(x, -1, -x + 1) \bullet (1, -1, -1)}{3}(1, -1, -1) = \frac{2x}{3}(1, -1, -1)$$

quindi

$$p_U(x, -1, -x + 1) = (x, -1, -x + 1) - (\frac{2}{3}x, -\frac{2}{3}x, -\frac{2}{3}x) = (\frac{1}{3}x, \frac{2}{3}x - 1, -\frac{1}{3}x + 1)$$

dunque $p_U(T_1) = (0, -1, 1) + < (1, 2, -1) >$.
Per calcolare $p_U(T_2)$ possiamo procedere allo stesso modo. Osserviamo però che T_2 è parallela ad $U^\perp$, perciò $p_U\left((0, 2, -1) + \alpha(-1, 1, 1)\right) = p_U(0, 2, -1) + \alpha\, p_U(-1, 1, 1) = p_U(0, 2, -1)$. Allora

$$p_{U^\perp}(0, 2, -1) = \frac{(0, 2, -1) \bullet (1, -1, -1)}{3}(1, -1, -1) = -\frac{1}{3}(1, -1, -1)$$

quindi $p_U(0, 2, -1) = (0, 2, -1) - \frac{1}{3}(1, -1, -1) = (\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3})$ e dunque $p_U(T_2) = (\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3})$.

[Traduzione geometrica: T_1 e T_2 sono due rette incidenti il piano U. La seconda è perpendicolare al piano, quindi la sua proiezione ortogonale è il solo punto di intersezione $T_2 \cap U$. La retta T_1 invece forma un angolo $\neq 0$, $\frac{\pi}{2}$ con U: la sua proiezione è dunque la retta passante per il punto di intersezione $T_1 \cap U$ parallela alla proiezione $(1, 2, -1)$ della direzione $(1, 0, -1)$ di T_1.]

Diamo tre soluzioni alternative del problema (b): le prime due sono algebriche e corrispondono a guardare il problema "da sopra" (cercare i vettori di U' che si proiettano su S) o "da sotto" (descrivere l'insieme di tutti i vettori dello spazio che si proiettano su S e poi intersecare questo insieme con U'). La terza soluzione utilizza l'interpretazione geometrica del problema.

Soluzione 1. Possiamo scrivere il generico vettore di U' come $(y + z + 3, y, z)$ (con y, $z \in \mathbb{R}$ variabili). La sua proiezione su $U^\perp$ è

$$p_{U^\perp}(y + z + 3, y, z) = \frac{(y + z + 3, y, z) \bullet (1, -1, -1)}{3}(1, -1, -1) = (1, -1, -1).$$

Non deve sorprendere il fatto che questa proiezione sia "costante" (non dipenda da y, z): ogni vettore di $U' = (1, -1, -1) + U$ è somma del vettore di norma minima $(1, -1, -1) \in U^\perp$ e di un vettore parallelo ad U, che ne è la proiezione su U:

$$p_U(y+z+3, y, z) = (y+z+3, y, z) - (1, -1, -1) = (y+z+2, y+1, z+1).$$

Questo vettore appartiene ad S se e solo se la sua prima coordinata è uguale ad 1:

$$y+z+2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad S' : \begin{cases} x-y-z = 3 \\ y+z = -1 \end{cases} . \tag{1}$$

Soluzione 2. Per definizione, S' è una varietà lineare contenuta in U' e nell'anti-immagine $p_U^{-1}(S)$ di S tramite l'applicazione lineare $p_U : \mathbb{R}^3 \to U$, quindi $S' \subseteq U' \cap p_U^{-1}(S)$. Risolvendo il sistema lineare che definisce S troviamo

$$S = \{(1, 1-z, z),\ z \in \mathbb{R}\} = (1, 1, 0) + < (0, -1, 1) > .$$

Un vettore di U è la proiezione di sé stesso. Inoltre $\ker p_U = U^\perp$. Quindi:

$$p_U^{-1}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + U^\perp \qquad \forall \mathbf{u} \in U.$$

In particolare, per i vettori di S abbiamo:

$$\begin{aligned} p_U^{-1}(1, 1-z, z) &= (1, 1-z, z) + < (1, -1, -1) > \\ &= \{(1, 1-z, z) + t(1, -1, -1),\ \forall t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(1+t, 1-z-t, z-t),\ \forall t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Dunque

$$p_U^{-1}(S) = \{(1+t, 1-z-t, z-t),\ \forall z, t \in \mathbb{R}\} = (1, 1, 0) + < (0, -1, 1), (1, -1, -1) > .$$

Allora $S' = U' \cap p_U^{-1}(S)$: sono i vettori $(1+t, 1-z-t, z-t) \in p_U^{-1}(S)$ che soddisfano l'equazione di U', cioé:

$$(1+t) - (1-z-t) - (z-t) = 3 \quad \Longrightarrow \quad t = 1, \forall z$$

perciò $S' = (2, 0, -1) + < (0, -1, 1) >$.

Soluzione 3. In termini geometrici, S' è una retta sul piano U' la cui proiezione ortogonale sul piano U è la retta S. I piani U ed U' sono paralleli, pertanto S' si trova intersecando U' con il piano π contenente S e parallelo ad $U^\perp$: il piano π non è altro che l'anti-immagine $p_U^{-1}(S)$ considerata precedentemente.
Affrontando il problema dal punto di vista geometrico, si lavora meglio in equazioni cartesiane: il piano π appartiene al fascio di asse S:

$$\lambda(x-y-z) + \mu(x-1) = 0.$$

Imponendo il parallelismo con $U^\perp =< (1, -1, -1) >$ troviamo π: $2x + y + z - 3 = 0$. Quindi

$$S' : \begin{cases} x-y-z = 3 \\ 2x+y+z-3 = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad (2, 0, -1) + < (0, -1, 1) >$$

Osserviamo che le equazioni trovate per S' sono combinazione lineare delle equazioni (1) trovate col primo metodo, quindi definiscono la stessa varietà.

S ed S' sono parallele: la distanza è data dalla norma $\|\mathbf{v} - p_U(\mathbf{v})\|$ per un qualsiasi vettore $\mathbf{v} \in S'$. Prendendo ad esempio $\mathbf{v} = (2, 0, -1)$ abbiamo $p_U(\mathbf{v}) = (1, 1, 0)$ (questo risulta dalla costruzione, ma lo si può anche calcolare direttamente). Dunque la distanza tra S ed S' è

$$d(S, S') = \|(2, 0, -1) - (1, 1, 0)\| = \|(1, -1, -1)\| = \sqrt{3}.$$

Esercizio 4. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcolare gli autovalori reali e complessi della matrice A

b) Dimostrare che A è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$.

c) Scrivere una matrice H invertibile e una matrice D diagonale a coefficienti complessi tale che $H^{-1}AH = D$

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di A è

$$\det \begin{pmatrix} -t & 1 & 0 \\ 0 & -t & 1 \\ -1 & -1 & -1-t \end{pmatrix} = -t^3 - t^2 - t - 1 = -(t+1)(t^2+1).$$

Gli autovalori sono quindi $-1, i, -i$ dove i è l'unità immaginaria ($i^2 = -1$). Avendo tre autovalori distinti, A è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$. Gli autospazi sono:

$$V_{-1} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} =< (1,-1,1) >; \quad V_i = \ker \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ 0 & -i & 1 \\ -1 & -1 & -1-i \end{pmatrix} =< (1,i,-1) >;$$

$$V_{-i} = \ker \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ -1 & -1 & -1+i \end{pmatrix} =< (1,-i,-1) > .$$

La matrice del cambiamento di base ha sulle colonne gli autovettori: $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & i & -i \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

A causa di un errore tipografico, l'esercizio 4 nei temi 3, 4 risulta notevolmente diverso da quello dei temi 1, 2, pur essendo di difficoltà analoga (teoria di Jordan anziché diagonalizzazione in $\mathbb{C}$).
Ne riportiamo la soluzione per completezza.

Esercizio 4, Tema 3 Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcolare gli autovalori reali e complessi della matrice A

b) Dimostrare che A è non è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$.

c) Scrivere una matrice H invertibile e una matrice J triangolare tale che $H^{-1}AH = J$.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di A è

$$\det \begin{pmatrix} -t & -1 & 0 \\ 0 & -t & 1 \\ -1 & 1 & -1-t \end{pmatrix} = -t^3 - t^2 + t + 1 = -(t+1)^2(t-1).$$

Gli autovalori sono quindi 1 di molteplicità algebrica 1 e -1 di molteplicità algebrica 2. Gli autospazi sono:

$$V_1 = \ker \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} =< (-1,1,1) >; \qquad V_{-1} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =< (1,1,-1) > .$$

La molteplicità geometrica dell'autovalore -1 è dunque strettamente minore della molteplicità geometrica, quindi la matrice non è diagonalizzabile (né in $\mathbb{R}$ né in $\mathbb{C}$). La forma di Jordan di A è

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice del cambiamento di base ha sulle prime due colonne gli autovettori trovati. La terza colonna si trova risolvendo il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \iff \qquad \begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} .$$

Se scegliamo la soluzione $(1,0,-1)$, la matrice cercata è $H = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.