

LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA o AEROSPAZIALE

Corso di Matematica 2

Risoluzione degli esercizi poposti nel Tema del 17-07-2003

1. Si scrivano in forma trigonometrica le radici di $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$ sapendo che $f(x) = \frac{x^6-1}{x+1}$.

R. Dalla notazione trigonometrica di $1 = 1[\cos(0) + i \sin(0)]$ si trovano le sei radici di 1:

$$z_{k+1} = \cos\left(\frac{2k\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{6}\right), \quad k = 0, \dots, 5,$$

vale a dire:

$$z_1 = \cos\left(\frac{2}{6}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{4}{6}\pi\right) + i \sin\left(\frac{4}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_3 = \cos\left(\frac{6}{6}\pi\right) + i \sin\left(\frac{6}{6}\pi\right) = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1$$

$$z_4 = \cos\left(\frac{8}{6}\pi\right) + i \sin\left(\frac{8}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_5 = \cos\left(\frac{10}{6}\pi\right) + i \sin\left(\frac{10}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_6 = \cos\left(\frac{12}{6}\pi\right) + i \sin\left(\frac{12}{6}\pi\right) = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi) = 1.$$

Le radici di $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$ sono le precedenti, esclusa $z_3 = -1$.

2. Sia L_A l'endomorfismo di $\mathbf{R}^4$ associato alla matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ rispetto alla

base canonica; si calcoli la controimmagine di $(0, 4, -1, 4)$.

R. Si tratta di risolvere il sistema la cui matrice (incompleta) è A e la cui colonna di termini noti è $(0, 4, -1, 4)^t$.

Mediante operazioni elementari sulle righe è possibile trasformare la matrice completa del sistema come segue:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 5 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

Le matrici completa e incompleta del sistema hanno rango due. Quindi la controimmagine di $(0, 4, -1, 4)$ non è vuota. Essa è data dalle soluzioni del sistema associato alla matrice ridotta in forma a scalini, cioè:

$$\begin{cases} x + y + t = -1 \\ -y + z + t = 2 \end{cases}.$$

Assumendo $z = a, t = b$, si ottiene

$$\begin{cases} x + y &= -1 - b \\ -y &= 2 - a - b \end{cases}$$

da cui $y = -2 + a + b, x = 1 - 2b - a$. In conclusione la controimmagine di $(0, 4, -1, 0)$ è la varietà lineare di dimensione 2:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

3. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ di $M_3(\mathbf{R})$.

1. Dire per quale valore di $t \in \mathbf{R}$ la terna $(1 + t, -t, -1)$ è autovettore di A .

Qual è l'autovalore corrispondente?

2. La matrice A è simile alla matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$?

In caso affermativo, determinare una matrice H invertibile tale che $H^{-1}AH = B$.

R. 1. Si tratta di stabilire per quali valori di t esiste un numero reale λ tale che

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + t \\ -t \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 + t \\ -t \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Si ottiene la relazione $\begin{pmatrix} 3t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 + t \\ -t \\ -1 \end{pmatrix}$ che risulta valida per $t = 0$ e $\lambda = 0$.

Dunque per $t = 0$ il vettore $(1 + t, -t, -1) = (1, 0, -1)$ è autovettore di A e $\lambda = 0$ è il corrispondente autovalore.

2. Osserviamo che la seconda e la terza riga di A sono uguali, pertanto la matrice A è non invertibile cioè $\det(A) = 0$. È facile calcolare il determinante della matrice B : $\det(B) = 9$. Dal momento che matrici simili hanno necessariamente lo stesso determinante, A e B non sono simili.

4. Si scrivano delle equazioni parametriche e l'equazione cartesiana del piano π che passa per $A(1, 2, 3), B(1, 0, -1)$ ed è parallelo alla retta $r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$.

Esiste un piano π' parallelo a π che contiene la retta $x = y = z$? Giustificare la risposta.

R. Il vettore geometrico $\overrightarrow{AB} = B - A = (0, -2, -4)$ e il vettore $u = (1, 1, -3)$ parallelo alla retta r individuano una base dello spazio direttore V_π del piano π che contiene A, B ed è parallelo a u . Una rappresentazione parametrica di π è data da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad p, t \in \mathbf{R}.$$

Si ottiene pertanto che l'equazione cartesiana del piano π è:

$$\det \begin{pmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = 0$$

cioè: $5x - 2y + z - 4 = 0$.

La retta $x = y = z$ ha la direzione del vettore $r = (1, 1, 1)$ e appartiene ad un piano π' parallelo a π se $r \in V_\pi$. Ora $r \in V_\pi$ se $r = (1, 1, 1)$ soddisfa l'equazione $5x - 2y + z = 0$ che definisce V_π . Dal momento che $(1, 1, 1)$ non soddisfa l'equazione $5x - 2y + z = 0$, un piano come richiesto non esiste.