LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTE-TERRITORIO
Corso di Matematica 2
Padova 20-08-08
TEMA n.1

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

a) Se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente dipendenti, allora $\mathbf{v}_k$ è combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}$.

b) Una matrice simmetrica è simile ad una matrice ortogonale.

c) Date due rette sghembe, esistono infinite rette ortogonali ed incidenti entrambe.

Risposte

a) Falso: uno dei vettori $\mathbf{v}_i$ sarà combinazione dei rimanenti, ma non è detto che sia l'ultimo. Esempio: $(1,0),(2,0),(0,1)$ sono dipendenti ma $(0,1)$ non è combinazione lineare di $(1,0)$ e $(2,0)$

b) Falso: la matrice nulla è simmetrica e non ortogonale.

c) Falso: la retta di minima distanza è l'unica retta ortogonale ed incidente entrambe.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Dimostrare che esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfa le seguenti condizioni:

$$f\left((0,-1,1) + \langle(1,1,1)\rangle\right) = (2,1,3); \quad f^{-1}(1,0,1) = (1,2,1) + \langle(1,1,1)\rangle$$

a) Scrivere la matrice di f rispetto alle basi canoniche.

b) Determinare nucleo ed immagine di f. L'applicazione f è iniettiva? È suriettiva?

c) L'applicazione f è un endomorfismo? È un isomorfismo? È un'isometria?

d) Calcolare la controimmagine del vettore $(1,1,2)$.

Svolgimento. La prima condizione dice che tutti i vettori della varietà lineare $(0,-1,1)+\langle(1,1,1)\rangle$ hanno per immagine $(2,1,3)$. Di conseguenza $f(1,1,1) = (0,0,0)$: infatti se due vettori qualsiasi della varietà hanno la stessa immagine, la loro differenza avrà come immagine il vettore nullo, e la differenza di due vettori della varietà è un multiplo di $(1,1,1)$.
Ne deduciamo che la prima condizione equivale alle seguenti:

$$f(0,-1,1) = (2,1,3); \qquad f(1,1,1) = (0,0,0). \tag{1}$$

La controimmagine di un vettore mediante un'applicazione lineare è una varietà lineare parallela al nucleo. La seconda condizione equivale quindi a dire che

$$f(1,2,1) = (1,0,1); \qquad \ker f = \langle(1,1,1)\rangle. \tag{2}$$

Si tratta quindi di dimostrare che esiste un'unica applicazione linerare f tale che

$$f(0,-1,1) = (2,1,3); \qquad f(1,1,1) = (0,0,0); \qquad f(1,2,1) = (1,0,1)$$

e questo si fa mostrando che i tre vettori assegnati nel dominio sono linearmente indipendenti:

$$rg\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

a) La matrice della f nelle basi $\mathcal{B} = \{(0,-1,1),(1,1,1),(1,2,1)\}$ nel dominio e canonica nel codominio è la matrice che ha sulle colonne le immagini assegnate dei vettori di $\mathcal{B}$:

$$M(f;\mathcal{B},\mathcal{E}_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per scrivere la matrice della f rispetto alle basi canoniche dobbiamo cambiare la base nel dominio. Calcoliamo prima la matrice $M(id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{E}_3,\mathcal{B})$ del cambiamento dalla base canonica alla $\mathcal{B}$

$$M(id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{E}_3,\mathcal{B}) = M(id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{B},\mathcal{E}_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Trattandosi di un cambiamento di base nel dominio, la matrice della f rispetto alle basi canoniche si trova moltiplicando *a destra* per la matrice $M(id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{E}_3,\mathcal{B})$, cioè:

$$M(f;\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3) = M(f;\mathcal{B},\mathcal{E}_3)M(id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{E}_3,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) A questa domanda si può rispondere anche senza aver svolto i calcoli del punto a). Abbiamo infatti già visto che le condizioni assegnate impongono $\ker f = \langle(1,1,1)\rangle$ ed in particolare f non è iniettiva. L'immagine di f è generata dalle immagini di una base del dominio, per esempio $\mathcal{B}$, quindi

$$\operatorname{Im} f = \langle(2,1,3),(1,0,1)\rangle$$

e poiché $(2,1,3)$ e $(1,0,1)$ sono indipendenti (non sono proporzionali), formano anche una base per $\operatorname{Im} f$. In particolare f non è suriettiva.

c) Essendo un'applicazione da uno spazio vettoriale in sé stesso, per definizione f è un endomorfismo. Non è un isomorfismo, dato che non è iniettiva. A maggior ragione non può essere un'isometria: il vettore $(1,1,1)$ di norma $\sqrt{3}$ ha per immagine il vettore nullo di norma 0.

d) Si tratta di risolvere il sistema lineare in cui la matrice dei coefficenti è la matrice di f ed il termine noto è $(1,1,2)$. Riducendo in forma a scala

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

troviamo che il sistema è risolubile e l'insieme delle soluzioni è dato dalla varietà lineare

$$f^{-1}(1,1,2) = (-1,-3,0) + \langle(1,1,1)\rangle. \tag{4}$$

Si poteva anche osservare che

$$(1,1,2) = (2,1,3) - (1,0,1) = f(0,-1,1) - f(1,2,1) = f(-1,-3,0)$$

che ci da la soluzione particolare $(-1,-3,0)$. Dato che $\ker f = \langle(1,1,1)\rangle$, questa osservazione ci permette di trovare la soluzione (4) senza risolvere il sistema.

Esercizio 2 Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1-k & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Per ogni valore di k, determinare autovalori ed autovettori della matrice A_k.

b) Esistono vettori di $\mathbb{R}^3$ che sono autovettori di A_k per ogni k?

c) Per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile? Per tali valori, scrivere una matrice H tale che $H^{-1}A_kH$ sia diagonale.

d) Determinare la forma di Jordan di A_k quando questa non è diagonalizzabile.

e) Esistono valori di k per i quali A_k è ortogonalmente diagonalizzabile? Per tali valori, scrivere una matrice ortogonale H tale che $H^{-1}A_kH$ sia diagonale.

Svolgimento. a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A_k

$$p_k(t) = \det \begin{pmatrix} k-t & 1-k & 0 \\ 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)\det \begin{pmatrix} k-t & 1-k \\ 1 & -t \end{pmatrix} = (1-t)(t^2 - kt + k - 1).$$

Trovando le radici del fattore di secondo grado, ricaviamo la fattorizzazione $p_k(t) = (1-t)^2(k-1-t)$. Gli autovalori sono dunque tutti reali. Dobbiamo distinguere il caso generale $k-1 \neq 1$, cioè $k \neq 2$, dal caso $k = 2$ nel quale gli autovalori coincidono.
Per $k \neq 2$, la matrice ha l'autovalore 1 con molteplicità algebrica 2 e l'autovalore $k-1$ con molteplicità 1. In questo caso, gli autospazi sono

$$V_1 = \ker \begin{pmatrix} k-1 & 1-k & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (1,1,0), (0,0,1) \rangle;$$

$$V_{k-1} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1-k & 0 \\ 1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 2-k \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 2-k \end{pmatrix} = \langle (k-1, 1, 0) \rangle$$

(osserviamo che l'ultima matrice ha rango 2 per l'ipotesi $k \neq 2$).

Per $k = 2$, la matrice A_2 ammette solo l'autovalore 1 con molteplicità algebrica 3. L'autospazio è

$$V_1 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (1,1,0), (0,0,1) \rangle.$$

b) Tutti i vettori non nulli del sottospazio $\langle (1,1,0), (0,0,1) \rangle$ sono autovettori di autovalore 1 per A_k, quale che sia il valore di $k \in \mathbb{R}$.

c) Da a) risulta che A_k è diagonalizzabile per $k \neq 2$. La matrice H ha sulle colonne una base di autovettori di A_k, ad esempio

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

d) A_2 ha il solo autovalore 1 con molteplicità geometrica 2. La sua forma di Jordan avrà quindi due blocchi e la somma delle dimensioni dei blocchi è pari alla molteplicità algebrica = 3. Dunque un blocco di dimensione 2 ed un blocco di dimensione 1:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

e) Una matrice è ortogonalmente diagonalizzabile se e solo se è simmetrica, quindi deve essere $1 = 1 - k$, cioé $k = 0$. I vettori scelti per la base di V_1 sono già tra loro ortogonali, quindi basta porre $k = 0$ nella matrice (5) trovata al punto c) e dividere le colonne per la loro norma:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3 In un fissato sistema di riferimento ortonormale $(\mathcal{R}; x, y, z)$, si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - z = 2 \end{cases}, \qquad r' : \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 3y - 2z = -6 \end{cases}$$

a) Determinare la posizione reciproca tra r ed r'.

b) Scrivere le equazioni cartesiane di un piano π avente uguale distanza positiva da r ed r'.

c) Scelto a piacere un punto $P \in \pi$, scrivere equazioni cartesiane di una retta per P incidente r ed r'.

d) Scrivere le equazioni del cambiamento di riferimento da $\mathcal{R}$ al riferimento $(\mathcal{R}'; X, Y, Z)$ che ha lo stesso orientamento ed in cui l'asse X è la retta r e l'asse Y è la retta ortogonale ed incidente r ed r'.

Svolgimento a) Dal calcolo del rango della matrice del sistema

$$rg \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \end{array}\right) = rg \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right) = 4$$

ricaviamo che le rette sono sghembe.

b) Un piano ha distanza positiva da una retta solo se è parallelo ad essa. Il piano cercato è quindi parallelo alle due rette. Avendo uguale distanza dalle due rette, sarà il piano parallelo ad r ed r' passante per il punto medio M del segmento che congiunge i punti di minima distanza.

Calcolando i parametri direttori delle due rette, troviamo che r è parallela al vettore $\mathbf{v} = (1, 2, 1)$ mentre r' è parallela a $\mathbf{v}' = (-1, 2, 3)$. La direzione ortogonale alle due rette è quindi

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} \times \mathbf{v}' = (4, -4, 4).$$

L'equazione del piano cercato è dunque

$$x - y + z = c \tag{6}$$

dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante determinata imponendo il passaggio per M.

Per determinare i punti di minima distanza scriviamo le equazioni parametriche delle due rette

$$r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}, \qquad r': \begin{cases} x = 2 - u \\ y = -2 + 2u \\ z = 3u \end{cases}.$$

Consideriamo il vettore congiungente il punto generico di r' col punto generico di r

$$(2 + t, 1 + 2t, t) - (2 - u, -2 + 2u, 3u) = (t + u, 3 + 2t - 2u, t - 3u)$$

I punti di minima distanza corrispondono ai valori dei parametri t ed u per i quali questo vettore è ortogonale ad entrambe le rette, ossia

$$\begin{cases} (t + u, 3 + 2t - 2u, t - 3u) \bullet (1, 2, 1) = 0 \\ (t + u, 3 + 2t - 2u, t - 3u) \bullet (-1, 2, 3) = 0 \end{cases} = \begin{cases} 6t - 6u + 6 = 0 \\ 6t - 14u + 6 = 0 \end{cases}$$

da cui ricaviamo le soluzioni $t = -1$ ed $u = 0$ corrispondenti ai punti $Q = (1, -1, -1)$ di r e $Q' = (2, -2, 0)$ di r'.
Il punto medio tra Q e Q' è allora $M = (\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ ed imponendo il passaggio per M nell'equazione (6) troviamo l'equazione del piano cercato:

$$\pi : x - y + z = \frac{5}{2}.$$

In alternativa, si poteva determinare l'equazione di π, cioé la costante nell'equazione (6), imponendo che la distanza di π da un qualsiasi punto di r (ad esempio $(2, 1, 0)$) sia uguale alla distanza di π da un qualsiasi punto di r' (ad esempio $(2, -2, 0)$):

$$d(\pi, (2, 1, 0)) = \frac{|2 - 1 - c|}{\sqrt{3}} = d(\pi, (2, -2, 0)) = \frac{|2 + 2 - c|}{\sqrt{3}}$$

ossia $|1 - c| = |4 + c|$, che equivale a $(1 - c)^2 = (4 - c)^2$. Sviluppando i quadrati e semplificando si trova $6c = 15$, cioé $c = \frac{5}{2}$.

c) Visto che possiamo scegliere P a piacere, prendiamo $P = M$ e la retta sarà allora la retta di minima distanza. Sapendo che passa per M ed è parallela a $\mathbf{w}$, ne ricaviamo prima le equazioni parametriche e successivamente le cartesiane

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} + s \\ y = -\frac{3}{2} - s \\ z = -\frac{1}{2} + s \end{cases} \implies \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = -2 \end{cases}.$$

d) Dalle condizioni assegnate risulta che l'asse Y è la retta di minima distanza determinata al punto c). L'origine del riferimento $\mathcal{R}'$ è quindi il punto di intersezione tra r e la retta minima, vale a dire il punto $Q = (1, -1, -1)$ determinato in d).
Conosciamo la direzione $(1, 2, 1)$ dell'asse X e la direzione $(1, -1, 1)$ dell'asse Y. Sapendo che i riferimenti hanno lo stesso orientamento, ne deduciamo la direzione

$$(1, 2, 1) \times (1, -1, 1) = (3, 0, -3)$$

dell'asse Z. Per scrivere la base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ associata ad $\mathcal{R}'$ non ci resta che dividere tali vettori per la loro norma. Perciò le equazioni del cambiamento di riferimento sono:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$