LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE - TERRITORIO
CORSO DI MATEMATICA 2
Padova 11-02-05
I prova parziale
Correzione del tema n.1

Esercizio 1. Dati i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U =< (5,1,7,0),(1,0,0,1),(0,1,2,6) > \quad W =< (1,0,2,1),(1,0,1,1) >$$

a) determinare una base per lo spazio $U \cap W$;

b) determinare una base per lo spazio $U + W$. Tale somma è diretta?

c) determinare il vettore di lunghezza minima della varietà lineare $(2,1,0,4) + W$.

Svolgimento. Una semplice verifica mostra che i generatori assegnati per U e W sono tra loro indipendenti e pertanto costituiscono delle basi per tali sottospazi. Per determinare $U \cap W$, riportiamo in matrice i generatori di U ed il generico vettore di W e riduciamo tale matrice in forma a scala:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ a+b & 0 & 2a+b & a+b \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5}(2a+b) \end{pmatrix} \tag{1}$$

da cui ricaviamo che $U \cap W =< (1,0,0,1) >$. Pertanto la somma $U+W$ non è diretta e, siccome $(1,0,2,1) \notin U$, necessariamente $\dim(U+W) = 4$ quindi $U+W = \mathbb{R}^4$.
Applicando il procedimento di Gram-Schmidt alla base assegnata di W, ne ricaviamo la base ortonormale $\{\frac{1}{\sqrt{6}}(1,0,2,1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,-1,1)\}$. La proiezione ortogonale di $(2,1,0,4)$ su W è

$$\frac{(2,1,0,4) \bullet (1,0,2,1)}{||(1,0,2,1)||^2}(1,0,2,1) + \frac{(2,1,0,4) \bullet (1,0,-1,1)}{||(1,0,-1,1)||^2}(1,0,-1,1) = (3,0,0,3).$$

Il vettore di lunghezza minima in $(2,1,0,4)+W$ è dato dalla proiezione ortogonale di $(2,1,0,4)$ su $W^{\perp}$ ed è quindi $(2,1,0,4) - (3,0,0,3) = (-1,1,0,1)$.

Soluzioni del tema 2. $U \cap W =< (1,-1,-2,0) >$, quindi $U + W = \mathbb{R}^4$ e la somma non è diretta. Il vettore di lunghezza minima in $(2,-2,-1,-1)+W$ è dato dalla proiezione ortogonale di $(2,-2,-1,-1)$ su $W^{\perp}$, cioé $(1,1,-1,-1)$.

Soluzioni del tema 3. $U \cap W =< (1,1,-1,1) >$, quindi $U + W = \mathbb{R}^4$ e la somma non è diretta. Il vettore di lunghezza minima in $(1,0,0,0) + W$ è dato dalla proiezione ortogonale di $(1,0,0,0)$ su $W^{\perp}$, cioé $\frac{1}{4}(1,-1,-1,-1)$.

Soluzioni del tema 4. $U \cap W =< (1,1,-1,3) >$, quindi $U + W = \mathbb{R}^4$ e la somma non è diretta. Il vettore di lunghezza minima in $(0,0,0,1) + W$ è dato dalla proiezione ortogonale di $(0,0,0,1)$ su $W^{\perp}$, cioé $\frac{1}{4}(-1,-1,1,1)$.

Esercizio 2. Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ le condizioni :

$$\begin{array}{ll} L_a(1,0,0) = (1,0,a,0); & L_a(0,1,0) = (0,1,1,a); \\ L_a(1,1,0) = (1,1,a+1,a); & L_a(1,1,-1) = (0,0,9-a^2,9-a^2) \end{array}$$

individuano un'applicazione lineare $L_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$. Per tali valori:

a) scrivere la matrice di L_a rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^4$;

b) si dica per quali $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione L_a è iniettiva e per quali è suriettiva;

c) si dica per quali $a \in \mathbb{R}$ il vettore $\mathbf{v} = (-1, 2, a^2 + 2a + 2, a^3 + a^2 - 4a)$ appartiene a $\operatorname{Im} L_a$ e, per tali valori, determinare $L_a^{-1}(\mathbf{v})$.

Svolgimento. I vettori $(1,0,0),(0,1,0),(1,1,-1)$ formano una base di $\mathbb{R}^3$ e, siccome $(1,1,0) = (1,0,0)+(0,1,0)$ ed $L_a(1,1,0) = L_a(1,0,0)+L_a(0,1,0)$, esiste un'unica applicazione lineare L_a che soddisfa le condizioni assegnate. Per scrivere la matrice di L_a, conosciamo le immagini dei primi due vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$ e possiamo ricavare $L_a(0,0,1)$ mediante la relazione $(0,0,1) = (1,1,0) - (1,1,-1)$. La matrice di L_a risulta allora:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & a^2+a-8 \\ 0 & a & a^2+a-9 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Im} L_a$ è un sottospazio $\mathbb{R}^4$ di dimensione $\dim \operatorname{Im} L_a \leq 3 = \dim \mathbb{R}^3$, l'applicazione non sarà mai suriettiva. Per studiarne l'iniettività e rispondere alla domanda (c) riduciamo in forma a scala la matrice completa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & a^2+a-8 & a^2+2a+2 \\ 0 & a & a^2+a-9 & a^3+a^2-4a \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-9 & a^2+3a \\ 0 & 0 & 0 & a^3-9a \end{pmatrix}.$$

Da cui ricaviamo che L_a è iniettiva per $a \neq \pm 3$ e che $\mathbf{v} \in \operatorname{Im} L_a$ solo per $a = 0$ o $a = -3$. Risolvendo il sistema troviamo $L_0^{-1}(\mathbf{v}) = (-1,2,0)$ e $L_{-3}^{-1}(\mathbf{v}) = (-1,2,0)+ < (1,1,-1) >$.

Soluzioni del tema 2. Esiste un'unica applicazione lineare L_a che soddisfa le condizioni assegnate. L_a non è mai suriettiva ed è iniettiva per $a \neq \pm 3$. Inoltre $\mathbf{v} \in \operatorname{Im} L_a$ solo per $a = 0$ o $a = 3$ ed allora $L_0^{-1}(\mathbf{v}) = (1,-1,0)$ e $L_3^{-1}(\mathbf{v}) = (1,-1,0)+ < (1,2,-1) >$.

Soluzioni del tema 3. Esiste un'unica applicazione lineare L_a che soddisfa le condizioni assegnate. L_a non è mai suriettiva ed è iniettiva per $a \neq \pm 2$. Inoltre $\mathbf{v} \in \operatorname{Im} L_a$ solo per $a = 0$ o $a = 2$ ed allora $L_0^{-1}(\mathbf{v}) = (2,1,0)$ e $L_2^{-1}(\mathbf{v}) = (2,1,0)+ < (2,-1,-1) >$.

Soluzioni del tema 4. Esiste un'unica applicazione lineare L_a che soddisfa le condizioni assegnate. L_a non è mai suriettiva ed è iniettiva per $a \neq \pm 2$. Inoltre $\mathbf{v} \in \operatorname{Im} L_a$ solo per $a = 0$ o $a = -2$ ed allora $L_0^{-1}(\mathbf{v}) = (1,-1,0)$ e $L_{-2}^{-1}(\mathbf{v}) = (1,-1,0)+ < (1,2,-1) >$.

Esercizio 3. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & b-2 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Stabilire per quali valori di $b \in \mathbb{R}$ la matrice è diagonalizzabile e determinare una base di autovettori per A.

b) Stabilire per quali valori di $b \in \mathbb{R}$ la matrice è simile ad una matrice di Jordan.

c) Stabilire per quali valori di $b \in \mathbb{R}$ la matrice è ortogonalmente diagonalizzabile.

d) Per i valori di $b \in \mathbb{R}$ trovati al punto precedente, calcolare A^n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di A è $p(t) = -t(t-2)(t-b)$. Per $b \neq 0, 2$, $p(t)$ ha tre radici distinte e quindi A è diagonalizzabile per tali valori; una base di autovettori è costituita da $\{(1,0,-1), (1,0,1), (b-1, b, 1)\}$. Dobbiamo quindi calcolare la molteplicità geometrica dell'autovalore doppio nei casi $b = 0, 2$. Per $b = 0$ troviamo

$$m_g(0) = 3 - \operatorname{rg} A = 3 - \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \lneq 2 = m_a(0)$$

mentre per $b = 2$ troviamo

$$m_g(2) = 3 - \operatorname{rg}(A - 2I_3) = 3 - \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 = m_a(0).$$

Quindi A è diagonalizzabile per $b \neq 0$. Poiché il polinomio caratteristico è completamente riducibile, per $b = 0$ la matrice è simile alla matrice di Jordan $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Una matrice è ortogonalmente diagonalizzabile se e solo se è simmetrica: quindi A è ortogonalmente diagonalizzabile solo per $b = 2$. Gli autospazi di A sono

$$V_0 =< (1,0,-1) > \qquad V_2 =< (1,0,1), (0,1,0) >$$

ed una matrice ortogonale H di autovettori si trova applicando il procedimento di Gram-Schmidt. Siccome $A = HDH^{-1}$, con D diagonale, possiamo calcolare $A^n = HD^nH^{-1}$:

$$A^n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Soluzioni del tema 2. A è diagonalizzabile per $b \neq 0$, ortog.te diagonalizzabile per $b = -2$.

Per $b = 0$, A è simile a $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Per $a = -2$, $A^n = \begin{pmatrix} -(-2)^{n-1} & 0 & (-2)^{n-1} \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ (-2)^{n-1} & 0 & -(-2)^{n-1} \end{pmatrix}$.

Soluzioni del tema 3. A è diagonalizzabile per $b \neq 0$, ortog.te diagonalizzabile per $b = 2$.

Per $b = 0$, A è simile a $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Per $a = 2$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & -2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ -2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$.

Soluzioni del tema 4. A è diagonalizzabile per $b \neq 0$, ortog.te diagonalizzabile per $b = -2$.

Per $b = 0$, A è simile a $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Per $a = -2$, $A^n = \begin{pmatrix} -(-2)^{n-1} & 0 & -(-2)^{n-1} \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ -(-2)^{n-1} & 0 & -(-2)^{n-1} \end{pmatrix}$.

Esercizio 4.

a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π ortogonale a $\sigma : x - y + 2z = 0$ e contenente la retta
$$r : \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - z = 1. \end{cases}$$

b) Scrivere le equazioni parametriche di r.

c) Determinare i punti di r che hanno distanza $\sqrt{6}$ dalla retta $s = \pi \cap \sigma$.

d) Scrivere le equazioni di π nel sistema di riferimento individuato dai punti $Q_0(1, 1, 0)$, $Q_1(2, 0, 2)$, $Q_2(1, 3, 1)$, $Q_3(6, 2, -2)$.

Svolgimento. Il piano π è parallelo alla direzione ortogonale a σ, cioè $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$. Nel fascio di piani $\lambda(x+2y-3)+\mu(x-z-1) = 0$ di asse r, il piano parallelo a $\mathbf{v}$ soddisfa $\lambda(-1)+\mu(-1) = 0$; scegliendo $\lambda = 1, \mu = -1$ troviamo quindi che π ha equazione $2y + z - 2 = 0$.
Le equazioni parametriche di r si ricavano risolvendo il sistema lineare delle sue equazioni cartesiane:
$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2t. \end{cases}$$
Poiché $s = \pi \cap \sigma$ e σ e π sono ortogonali, $d(P, s) = d(P, \sigma)$ per ogni punto $P \in \pi$, in particolare per ogni punto di r. Applicando la formula per la distanza di un punto da un piano, cerchiamo allora i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui
$$\frac{|(1 + 2t) - (1 - t) + 2(2t)|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{|7t|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$
da cui ricaviamo i valori $t = \pm 6/7$. Le equazioni del cambiamento di riferimento sono date da
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$
Sostituendo nell'equazione di π troviamo che nel nuovo riferimento questo piano ha equazione $Y = 0$, come potevamo dedurre dal fatto che π passa per Q_0 ed è ortogonale al vettore $Q_2 - Q_0 = (0, 2, 1)$.

Soluzioni del tema 2. $\pi : x - 4y + 3z + 2 = 0$; $r : (1, 0, -1)+ < (2, -1, -2) >$. I punti di r che hanno distanza $\sqrt{3}$ da s sono $(-5, 3, 5)$ e $(7, -3, -7)$. L'equazione di π nel riferimento $\{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$ è $Z = 0$.

Soluzioni del tema 3. $\pi : x - y + 1 = 0$; $r : (-1, 0, 0)+ < (2, 2, -1) >$. I punti di r che hanno distanza $\sqrt{3}$ da s sono $(-23, -24, 12)$ e $(19, 20, -10)$. L'equazione di π nel riferimento $\{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$ è $X = 0$.

Soluzioni del tema 4. $\pi : x - y + z - 3 = 0$; $r : (3, 0, 0)+ < (3, 1, -2) >$. I punti di r che hanno distanza $\sqrt{3}$ da s sono $(3, 0, 0)$ e $(-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}, \frac{12}{5})$. L'equazione di π nel riferimento $\{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$ è $Y = 0$.