LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE-TERRITORIO
Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Padova 21-07-09
TEMA n.1

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta Qualora non si risponda in maniera corretta e ben motivata ad almeno 2 di questi 3 quesiti il compito verrà considerato gravemente insufficiente e non verrà corretto il resto dell'elaborato.

a) Un sistema omogeneo che ha una soluzione non nulla ammette infinite soluzioni.

b) Se una matrice M è diagonalizzabile ed i suoi autospazi sono a due a due ortogonali, allora M è simmetrica.

c) Due piani ortogonali in $\mathbb{A}^3$ non hanno direzioni in comune.

Risposte.

a) VERO: Le soluzioni di un sistema omogeneo formano un sottospazio, quindi se $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ è soluzione allora $\lambda\mathbf{s}$ è soluzione $\forall\lambda \in \mathbb{R}$.

b) VERO: il procedimento di Gram-Schmidt permette di costruire una base ortonormale di ciascun autospazio; essendo questi ortogonali per ipotesi, abbiamo una base ortonormale di autovettori. La matrice M è allora ortogonalmente diagonalizzabile, il che equivale a dire che M è simmetrica.

c) FALSO: due piani hanno sempre almeno una direzione in comune, dato che l'intersezione di due sottospazi di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$ (giaciture dei due piani) ha dimensione come minimo 1.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Dimostrare che esiste un'unico valore di $k \in \mathbb{R}$, e trovarlo, per il quale le condizioni:

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}; \quad f\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}; \quad f\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k\\0\\0\\1\end{pmatrix}; \quad f\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-k\end{pmatrix}.$$

determinano un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$.

a) Determinare nucleo ed immagine di f. L'applicazione è iniettiva? È suriettiva?

b) Sia $S = \{(x, y, z, t)^T \in \mathbb{R}^4 | \, y + z = 0\}$. Determinare una base per $S \cap \operatorname{Im} f$.

c) La somma $S + \operatorname{Im} f$ è diretta? Scriverne una base.

d) Determinare, se esiste, un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g = id_{\mathbb{R}^4}$.

e) Determinare, se esiste, un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $h \circ f = id_{\mathbb{R}^3}$.

Svolgimento. Quattro vettori in $\mathbb{R}^3$ sono sicuramente dipendenti: dobbiamo trovare le relazioni di dipendenza tra i vettori assegnati nel dominio, ossia cerchiamo per quali α, β, γ, $\delta \in \mathbb{R}$ vale:

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\1 & 2 & -1 & 1\\2 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\\delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Risolviamo il sistema in α, β, γ, δ calcolando la decomposizione LU

$$P = I_3; \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = -\beta = -\gamma \\ \delta = 0 \end{cases}.$$

Ricaviamo quindi che $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Inoltre l'insieme $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ è indipendente (il sistema che ne studia la dipendenza si ricava dal precedente ponendo $\gamma = 0$ e non ammette soluzione non nulla) e costituisce quindi una base di $\mathbb{R}^3$. Esiste quindi un'unica applicazione lineare che soddisfa la prima, seconda e quarta condizione di partenza (per ogni k). Affinché anche la terza sia soddisfatta occorre che l'immagine del terzo vettore soddisfi la medesima relazione:

$$\begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad k = -1.$$

La matrice di f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ nel dominio e canonica di $\mathbb{R}^4$ e la sua decomposizione LU sono:

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{E})$ ha rango 3 e dunque f è iniettiva. Non potrebbe comunque essere suriettiva (nessuna applicazione da $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ lo è): una base per l'immagine è data dalle colonne di $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{E})$. Un generico vettore di $\operatorname{Im}(f)$ è quindi

$$a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b + c \\ a + b \\ 0 \\ a + c \end{pmatrix}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Questo appartiene ad S se e solo se la somma della seconda e terza coordinata è zero: $(a+b)+0 = 0$. Dunque

$$S \cap \operatorname{Im}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} b + c \\ 0 \\ 0 \\ -b + c \end{pmatrix} : \ b, c \in \mathbb{R} \right\} = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > .$$

In particolare, la somma $S + \operatorname{Im}(f)$ non è diretta. Per la formula di Grassmann, la dimensione di $S + \operatorname{Im}(f)$ è $\dim S + \dim \operatorname{Im}(f) - \dim(S \cap \operatorname{Im}(f)) = 3 + 3 - 2 = 4$. Quindi $S + \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^4$ ed una base è data per esempio dalla base canonica.

Si è visto sopra che f non è suriettiva: non può allora esistere nessuna $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g$ sia l'identità, perché se la composizione è suriettiva, la seconda applicazione deve essere suriettiva.

Una $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $h(f(\mathbf{v})) = \mathbf{v}$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ deve in particolare soddisfare le condizioni:

$$h \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad h \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad h \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Poiché un'applicazione è individuata dai suoi valori sui vettori di una base, per determinare h basta completare la base di $\operatorname{Im}(f)$ ad una base di $\mathbb{R}^4$ ed assegnare un valore qualsiasi al vettore aggiunto. Osserviamo che i vettori di $\operatorname{Im}(f)$ hanno terza coordinata nulla: basta quindi aggiungere il terzo vettore $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, 0)^T$ della base canonica e scegliere un valore $h(\mathbf{e}_3)$, per esempio $h(\mathbf{e}_3) = \mathbf{0}$.

Esercizio 2 Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Il sottospazio $z = 0$ contiene autovettori della matrice A? Per quali autovalori?

b) Determinare tutti gli autovalori e gli autospazi di A.

c) Scrivere, se esiste, una matrice ortogonale H tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale.

d) La matrice B ha autovettori in comune con A? Le due matrici sono simili?

e) Scrivere una matrice K tale che $K^{-1}BK$ sia una matrice di Jordan. K può essere ortogonale?

Svolgimento. Dato un vettore $(x, y, 0)^T$ del sottospazio $z = 0$ abbiamo

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x + y \\ x + 6y \\ x - y \end{pmatrix}.$$

Affinché questo appartenga ancora al sottospazio $z = 0$ deve essere $x = y$. Troviamo allora

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

quindi $(1, 1, 0)^T$ è autovettore di autovalore $\lambda_1 = 7$. Per determinare gli altri autovalori λ_2 e λ_3 possiamo calcolare il polinomio caratteristico di A e poi dividerlo per il fattore $t - 7$. È però più semplice determinarli usando la traccia ed il determinante di A:

$$7 + \lambda_2 + \lambda_3 = \operatorname{Tr} A = 10; \qquad 7\lambda_2\lambda_3 = \det A = -196.$$

Quindi $\lambda_2 + \lambda_3 = 3$ e $\lambda_2\lambda_3 = -28$, cioè $\lambda_2 = 7$ e $\lambda_3 = -4$. Gli autospazi di A sono:

$$V_{A,7} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \\ 3 & -3 & -9 \end{pmatrix} = < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >; \quad V_{A,-4} = \ker \begin{pmatrix} 10 & 1 & 3 \\ 1 & 10 & -3 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} = < \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} >.$$

[In alternativa, siccome A è simmetrica, per determinare $V_{A,-4}$ invece di calcolare $\ker(A + 4I_3)$ potremmo calcolare $V_{A,7}^{\perp}$.] Per scrivere una base ortonormale di $V_{A,7}$ applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \implies V_7 = < \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{22}} \\ \frac{-3}{\sqrt{22}} \\ \frac{2}{\sqrt{22}} \end{pmatrix} >.$$

La matrice ortogonale cha diagonalizza A è perciò:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{22}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{22}} & -\frac{1}{\sqrt{11}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{22}} & -\frac{3}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}.$$

Cerchiamo gli autovettori di autovalore 7 di A che sono anche autovettori di B:

$$\begin{pmatrix} 9 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha + 3\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\alpha + 32\beta \\ 7\alpha + 11\beta \\ 7\beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha + 3\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

L'ultima coordinata impone $\lambda = 7$ oppure $\beta = 0$; dalla seconda deduciamo che l'unica soluzione possibile è $\beta = 0$, con $\lambda = 7$. Perciò $(1, 1, 0)^T$ è autovettore di autovalore 7 sia per A che per B. Inoltre:

$$\begin{pmatrix} 9 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

quindi anche $(1,-1,-3)^T$ è autovettore sia per A che per B, di autovalore -4.
Il terzo autovalore μ di B si trova anch'esso mediante la traccia: $7-4+\mu = \operatorname{Tr} B = 10$ dunque $\mu = 7$: le due matrici hanno gli stessi autovalori. Determiniamo l'autospazio di autovalore 7 per B:

$$V_{B,7} = \ker \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 4 & -4 & -1 \\ 3 & -3 & -9 \end{pmatrix} =< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} > .$$

La molteplicità geometrica dell'autovalore 7 per B è strettamente minore della molteplicità algebrica, quindi B non è diagonalizzabile e dunque non è simile ad A.

La forma di Jordan di B ha un blocco 2×2 di autovalore 7 ed uno di dimensione 1 di autovalore -4. Prima e terza colonna della matrice K sono date dagli autovettori di B. La seconda si trova risolvendo il sistema non omogeneo

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 4 & -4 & -1 \\ 3 & -3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che risolviamo calcolando la decomposizione LU:

$$P = I_3; \quad L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -11 & 0 \\ 3 & -\frac{33}{2} & 1 \end{pmatrix}; \quad U = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{11} \\ 0 \\ \frac{1}{11} \end{pmatrix} + < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

La forma di Jordan di B e la matrice del cambiamento di base sono pertanto:

$$J = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}; \qquad K = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{11} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{11} & -3 \end{pmatrix}.$$

Meno evidente è il fatto che non esiste una matrice K ortogonale (non c'è nessun motivo teorico che lo impedisca). La prima e terza colonna di K sono autovettori, quindi possiamo sostituirle con multipli non nulli, e li scegliamo in modo che abbiano norma 1. Questo individua prima e terza colonna a meno di un fattore ± 1.
La seconda colonna invece è soluzione di un sistema non omogeneo (con termine noto uguale alla prima colonna di K), dunque appartiene ad una varietà lineare: somma di una soluzione particolare e di un vettore del nucleo. Dobbiamo stabilire se questa varietà lineare contiene vettori che sono ortogonali a prima e terza colonna e di norma 1. Non possiamo fare combinazioni lineari arbitrarie dei vettori della varietà: il primo è fisso e solo il secondo può essere modificato.
Nel nostro caso la matrice dovrebbe essere del tipo seguente:

$$\begin{pmatrix} \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} & a & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} & b & -\frac{1}{\sqrt{11}} \\ 0 & c & -\frac{3}{\sqrt{11}} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 4 & -4 & -1 \\ 3 & -3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \frac{\pm 3}{11\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{\pm 1}{11\sqrt{2}} \end{pmatrix} + < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

da cui si ricava $(a,b,c)^T = (\frac{\pm 3}{11\sqrt{2}} + t, t, \frac{\pm 1}{11\sqrt{2}})^T$ per un opportuno $t \in \mathbb{R}$. Le condizioni di ortogonalità al primo autovettore ed di avere norma 1 si scrivono:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{\pm 3}{11\sqrt{2}} + t \\ t \\ \frac{\pm 1}{11\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{\pm 3}{11\sqrt{2}} + 2t = 0; \quad \begin{pmatrix} \frac{\pm 3}{11\sqrt{2}} + t \\ t \\ \frac{\pm 1}{11\sqrt{2}} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{\pm 3}{11\sqrt{2}} + t \\ t \\ \frac{\pm 1}{11\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \left(\frac{\pm 3}{11\sqrt{2}} + t\right)^2 + t^2 + \frac{1}{242} = 1$$

(la terza condizione, cioè l'ortogonlità tra la seconda e terza colonna, è in questo caso soddisfatta per ogni t). La prima equazione ci dà $t = \frac{\mp 3}{22\sqrt{2}}$ che non è soluzione della seconda. Quindi non esiste nessuna matrice ortogonale K tale che $K^{-1}BK = J$.

Esercizio 3 Si considerino i punti $P(-1,0,-1)$ e $Q(2,0,-3)$ e la retta

$$s : \begin{cases} 2x + 3y + 3z + 1 = 0 \\ 4x + 7y + 6z + 2 = 0 \end{cases} .$$

a) Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per P e Q.

b) Determinare la posizione reciproca tra r ed s.

c) Determinare tutti i piani passanti per P e Q ed aventi distanza 1 da s.

d) Determinare tutti i piani passanti per P e Q ed aventi la minima distanza possibile da s.

e) Determinare tutti i piani passanti per P e Q ed aventi la massima distanza possibile da s.

Svolgimento. La retta r passa per P ed è parallela a $Q - P = (3,0,-2)^T$ quindi

$$r : \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 0 \\ z = -1 - 2t \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad r : \begin{cases} 2x + 3z + 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases} .$$

Per determinare la posizione reciproca delle due rette calcoliamo il rango della matrice del sistema:

$$(A|\mathbf{d}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right); \quad P = I_4; \quad L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad U = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Il rango della matrice incompleta è 2 mentre quello della completa è 3, quindi le rette sono parallele.

Un piano passante per P e Q è un piano del fascio di asse la retta r:

$$\pi : \lambda(2x + 3z + 5) + \mu y = 0.$$

Poiché s è parallela ad r, la retta s è parallela a tutti i piani del fascio e tutti i punti di s hanno la stessa distanza dai piani del fascio. Scegliendo un punto di s, ad esempio $S(1,0,-1)$, troviamo

$$d(s,\pi) = d(S,\pi) = \frac{|\lambda(2-3+5)|}{\sqrt{4\lambda^2 + \mu^2 + 9\lambda^2}} = \frac{4|\lambda|}{\sqrt{13\lambda^2 + \mu^2}}.$$

Affinché questa distanza sia pari ad 1, dovrà essere $16\lambda^2 = 13\lambda^2 + \mu^2$, cioè $3\lambda^2 = \mu^2$. Quindi i piani per r che distano 1 da s sono:

$$\pi_1 : 2x + \sqrt{3}y + 3z + 5 = 0; \qquad \pi_1' : 2x - \sqrt{3}y + 3z + 5 = 0.$$

Le rette sono complanari, quindi il piano π_0 che le contiene entrambe ha distanza nulla da s, che è la distanza minima possibile. Troviamo π_0 come il piano del fascio di asse r che passa per S:

$$\lambda(2-3+5) + \mu(0) = 0 \qquad \Longrightarrow \quad \lambda = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \pi_0 : y = 0.$$

La distanza da s di un piano π contenente r è minore o uguale alla distanza $d(s,r)$ tra le due rette. D'altra parte, sia ρ il piano per r ed ortogonale al piano π_0 contenente le due rette. La distanza $d(s,\rho)$ è uguale alla distanza $d(s,r)$: infatti in questo caso la proiezione di un qualunque punto di s su ρ cade in r. Pertanto ρ è il piano per r che ha distanza massima da s.
La direzione ortogonale a π_0 è $(0,1,0)^T$, quindi ρ è il piano del fascio per r parallelo a $(0,1,0)^T$:

$$\lambda(0) + \mu(1) = 0 \qquad \Longrightarrow \quad \mu = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \rho : 2x + 3z + 5 = 0.$$