LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE - TERRITORIO
CORSO DI MATEMATICA 2
Padova 22-03-06
Correzione del tema n.1

Esercizio 1. Sia $\varphi : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ la funzione definita da

$$\varphi\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.$$

a) Verificare che φ è lineare e determinare $\ker\varphi$ ed $\operatorname{Im}\varphi$.

b) Sia $S \leq M_2(\mathbb{R})$ il sottospazio delle matrici simmetriche 2×2; determinare una base per lo spazio $S \cap \operatorname{Im}\varphi$. La somma $S + \operatorname{Im}\varphi$ è diretta?

c) Determinare, se possibile, un sottospazio $T \leq M_2(\mathbb{R})$ tale che $(S + \operatorname{Im}\varphi) \oplus T = M_2(\mathbb{R})$.

d) Sia $\psi : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ l'isomorfismo $\psi\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = (x, y, z, t)$: determinare il vettore di norma minima della varietà lineare $(1, 2, 3, 4) + \operatorname{Im}(\psi \circ \varphi)$.

Svolgimento. La linearità di φ segue dalle proprietà del prodotto di matrici: date A, M, $N \in M_2(\mathbb{R})$ ed α, $\beta \in \mathbb{R}$ allora $A \cdot (\alpha M + \beta N) = \alpha A \cdot M + \beta A \cdot N$.

$$\operatorname{Im}\varphi = \left\{\begin{pmatrix} x+z & y+t \\ x+z & y+t \end{pmatrix} \mid x, y, z, t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\} = \langle\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\rangle;$$

$$\ker\varphi = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ -x & -y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}\right\} = \langle\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\rangle.$$

Siccome $S = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$, dalla descrizione precedente di $\operatorname{Im}\varphi$ segue che

$$S \cap \operatorname{Im}\varphi = \left\{\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\right\} = \langle\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\rangle.$$

Poiché $\dim S = 3$, dalla formula di Grassmann segue che $\dim(S + \operatorname{Im}\varphi) = 4$ e quindi

$$S + \operatorname{Im}\varphi = M_2(\mathbb{R}).$$

Pertanto il sottospazio banale $T = \{\mathbf{0}\}$ è l'unico che verifica la condizione $(S+\operatorname{Im}\varphi)\oplus T = M_2(\mathbb{R})$. Abbiamo $\operatorname{Im}(\psi \circ \varphi) = \langle(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\rangle$, quindi il vettore di norma minima richiesto è la proiezione di $(1, 2, 3, 4)$ sull'ortogonale di $\operatorname{Im}(\psi \circ \varphi)$ cioè

$$(1, 2, 3, 4) - \frac{(1, 2, 3, 4) \bullet (1, 0, 1, 0)}{||(1, 0, 1, 0)||^2}(1, 0, 1, 0) - \frac{(1, 2, 3, 4) \bullet (0, 1, 0, 1)}{||(0, 1, 0, 1)||^2}(0, 1, 0, 1) = (-1, -1, 1, 1).$$

Esercizio 2. Sia $\mathbf{v} \in \langle(1,-1,1)\rangle$. Verificare che le condizioni $L(2,1,0) = (2,1,3)$, $L(1,2,0) = (1,2,3)$ ed $L(0,0,1) = \mathbf{v}$ individuano un endomorfismo $L_{\mathbf{v}}$ di $\mathbb{R}^3$ e scriverne la matrice $A_{\mathbf{v}}$ rispetto alla base canonica.

a) Per ogni $\mathbf{v} \in \langle(1,-1,1)\rangle$, stabilire se l'endomorfismo $L_{\mathbf{v}}$ è diagonalizzabile, determinandone una base di autovettori. Altrimenti, scrivere una matrice di Jordan simile ad $A_{\mathbf{v}}$.

b) Gli endomorfismi $L_{\mathbf{v}}$ ammettono autovettori comuni?

c) Esistono dei $\mathbf{v} \in \langle(1,-1,1)\rangle$ per i quali $A_{\mathbf{v}}$ sia la matrice di una proiezione p_U^W (per opportuni sottospazi U e W tali che $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$)?

Svolgimento. I vettori $(2,1,0),(1,2,0),(0,0,1)$ formano una base di $\mathbb{R}^3$ pertanto, per ogni scelta di $\mathbf{v}$, esiste un'unica applicazione lineare $L_{\mathbf{v}}$ che soddisfa le condizioni assegnate. Per scrivere la matrice di $L_{\mathbf{v}}$ rispetto alla base canonica, esprimiamo

$$(1,0,0) = \frac{2}{3}(2,1,0) - \frac{1}{3}(1,2,0) \qquad \text{e} \qquad (0,1,0) = -\frac{1}{3}(2,1,0) + \frac{2}{3}(1,2,0)$$

da cui ricaviamo

$$L_{\mathbf{v}}(1,0,0) = \frac{2}{3}(2,1,3) - \frac{1}{3}(1,2,3) = (1,0,1); \quad L_{\mathbf{v}}(0,1,0) = -\frac{1}{3}(2,1,3) + \frac{2}{3}(1,2,3) = (0,1,1).$$

Per $\mathbf{v} = (\alpha,-\alpha,\alpha)$, la matrice di $L_{\mathbf{v}}$ risulta allora:

$$A_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di $L_{\mathbf{v}}$ è $p_\alpha(t) = (1-t)^2(\alpha - t)$. Per $\alpha = 1$ (cioé $\mathbf{v} = (1,-1,1)$), c'è un unico autovalore triplo e la matrice non è diagonalizzabile (se lo fosse, sarebbe già diagonale); risulta inoltre che $m_g(1) = 3 - rg(A-I) = 1$, pertanto la matrice è simile alla matrice di Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per $\alpha \neq 1$, l'autovalore 1, di molteplicità algebrica $m_a(1) = 2$, ha molteplicità geometrica

$$m_g(1) = 3 - rg \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 1 & 1 & \alpha - 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{se } \alpha = 0 \\ 1 & \text{se } \alpha \neq 0 \end{cases}.$$

Quindi per $\alpha \neq 0, 1$ (cioé $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}, (1,-1,1)$), la matrice $A_{\mathbf{v}}$ è simile alla matrice di Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Per $\alpha = 0$ (quindi $\mathbf{v} = \mathbf{0}$), la matrice è diagonalizzabile ed i suoi autospazi sono

$$V_1 = \langle(1,-1,0),(0,1,1)\rangle; \qquad V_0 = \langle(0,0,1)\rangle.$$

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $(1,-1,0)$ è autovettore di autovalore 1; dato che per $\alpha = 1$, la matrice ha un solo autospazio di dimensione 1, questo è l'unico autovettore comune a tutte le matrici.
Ricordando che la matrice della proiezione p_U^W è diagonalizzabile, con autovalori 0 ed 1 di autospazi $V_0 = W$ e $V_1 = U$, abbiamo che $L_{\mathbf{v}}$ è una proiezione solo per $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ con $U = \langle(1,-1,0),(0,1,1)\rangle$ e $W = \langle(0,0,1)\rangle$.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{A}^3$, con un sistema di riferimento $\mathcal{R}$, si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x - z = 1 \\ 2y - z = 4 \end{cases}, \qquad s_\alpha : \begin{cases} x + 2y - 2z = 9\alpha + 2 \\ (2 - 9\alpha)x - 2z = 6\alpha - 9\alpha^2 \end{cases}.$$

a) Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, studiare la posizione reciproca delle due rette.

b) Verificare che esiste un valore $\alpha \in \mathbb{R}$ per il quale r ed s_α sono incidenti ed ortogonali.

c) Detto $\bar{\alpha}$ il valore trovato al punto precedente, sia $\mathcal{R}'$ il sistema di riferimento in cui l'asse X è la retta r, l'asse Y è la retta $s_{\bar{\alpha}}$ (entrambe orientate secondo le x crescenti) e che ha lo stesso orientamento di $\mathcal{R}$. Scrivere le equazioni di passaggio da $\mathcal{R}$ ad $\mathcal{R}'$.

d) Scrivere le equazioni nel sistema di riferimento $\mathcal{R}'$ delle rette s_α che sono parallele ad r.

Svolgimento. Riducendo in forma a scala la matrice del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 9\alpha + 2 \\ (2 - 9\alpha) & 0 & -2 & 6\alpha - 9\alpha^2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -9\alpha & -9\alpha^2 + 15\alpha - 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9\alpha - 3 \end{pmatrix}$$

troviamo che le rette sono incidenti per $\alpha = \frac{1}{3}$, parallele per $\alpha = 0$ e sghembe altrimenti. La direzione di r è $(2, 1, 2)$, quella di $s_{\frac{1}{3}}$ è $(2, -2, -1)$, che risultano pertanto ortogonali.
Risolvendo il sistema per $\alpha = \frac{1}{3}$ troviamo l'origine $Q_0 = r \cap s_{\frac{1}{3}} = (\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{2}{3})$ del riferimento $\mathcal{R}'$. I primi due vettori della base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ corrispondente ad $\mathcal{R}'$ sono le direzioni $\frac{1}{3}(2, 1, 2)$ di r e $\frac{1}{3}(2, -2, -1)$ di $s_{\frac{1}{3}}$ (con la prima coordinata positiva in corrispondenza dell'orientamento secondo le x crescenti); il terzo vettore della base, affinché $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$ abbiano lo stesso orientamento, deve essere

$$(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \times (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}).$$

Le equazioni del cambiamento di riferimento sono quindi:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

La retta s_0 è parallela ad r e passa per $(0, 1, 0) = Q_0 - \frac{1}{3}(1, 2, -2)$: le sue equazioni nel riferimento $\mathcal{R}'$ sono quindi

$$r : \begin{cases} Y = 0 \\ Z = -1 \end{cases}$$