LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA o AEROSPAZIALE

Corso di Matematica 2

PADOVA 25-10-03

Svolgimento della prima prova parziale del 25-10-2003 (Tema n.1)

Esercizio 1. *Sia* $T : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ *l'endomorfismo di* $\mathbf{R}^3$ *definito dalle seguenti condizioni:* $T(1,0,0) = (3,2,1)$, $T(0,1,0) = (-1,2,-3)$, $T(0,0,1) = (2,4,-2)$, *e per ogni* $a \in \mathbf{R}$ *sia* $S_a : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$

$$S_a(1,2) = (6,4,2), \;\; S_a(2,-1) = (a,0,4).$$

1. *Scrivere la matrice associata a* T *rispetto alla base canonica di* $\mathbf{R}^3$.
2. *Determinare nucleo e immagine di* T*: calcolare la loro dimensione ed esibire una base per ciascuno di essi. L'applicazione* T *è suriettiva?*
3. *Determinare per quali* a *si ha* $ImT = ImS_a$ *e calcolare la dimensione di* $ImT \cap ImS_a$ *al variare di* a.

Svolgimento. 1. Poiché vengono assegnate le immagini mediante T dei vettori della base canonica di $\mathbf{R}^3$:

$$\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\},$$

la matrice di T rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Essendo A la matrice di T (rispetto alla base canonica) l'immagine di T è generata dalle colonne della matrice A: $Im(T) = \langle (3,2,1), (-1,2,-3), (2,4,-2) \rangle$.
Ora il rango di A è:

$$rg(A) = rg \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Quindi $\dim Im(T) = 2$. In particolare possiamo scegliere come base di ImT i primi due vettori colonna di A, essendo questi non proporzionali (e quindi linearmente indipendenti): $ImT = \langle (3,2,1), (-1,2,-3) \rangle$.
T non è suriettiva perché $\dim Im(T) = 2 < \dim \mathbf{R}^3$.
Per determinare il nucleo di T possiamo utilizzare la forma a scalini della matrice A. Si ha dunque:

$$ker(T) = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | \begin{cases} x - 3y - 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | x = 3y + 2z;\;\; y = -z\} =$$

$$= \langle (-1,-1,1) \rangle.$$

3. L'immagine della funzione lineare S_a è $Im(S_a) = \langle (6,4,2), (a,0,4) \rangle$ che ha dimensione 2 per ogni $a \in \mathbf{R}$..

Lo spazio vettoriale somma $Im(T) + Im(S_a)$ risulta essere

$Im(T)+Im(S_a) = \langle(3,2,1),(-1,2,-3),(6,4,2),(a,0,4)\rangle = \langle(3,2,1),(-1,2,-3),(a,0,4)\rangle$,

essendo $(6,4,2) = 2(3,2,1)$.

Si ha dunque: $\dim(Im(T) + Im(S_a))$=$rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 4 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 8 & -8 \\ 0 & 2a & 4-3a \end{pmatrix} =$
$= rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4-a \end{pmatrix}$.

Dunque, se $a \neq 4$, $\dim(Im(T)+Im(S_a)) = 3$ e, per la formula di Grassmann, $\dim(Im(T)\cap Im(S_a)) = 2+2-3 = 1$.
Se $a = 4$ allora $\dim(Im(T) + Im(S_a)) = 2 = \dim Im(T) = \dim Im(S_a)$ quindi $Im(T) = Im(S_4)$.

Esercizio 2. *Si discuta, al variare del parametro reale k, il seguente sistema lineare:*

$$\begin{cases} x + kz = 1 \\ 2x + 2y + (k^2+2k)z = 1 + k \\ 3x + 4y + 5kz = 3. \end{cases}$$

Si determinino, quando possibile, le soluzioni del sistema lineare assegnato. In particolare si determinino le soluzioni del sistema per $k = 2$.

Svolgimento. La matrice completa associata al sistema è la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & 1 \\ 2 & 2 & k^2+2k & 1+k \\ 3 & 4 & 5k & 3 \end{array}\right).$$

Mediante operazioni elementari sulle righe di A è possibile determinare la sua forma a scalini per righe:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & 1 \\ 0 & 2 & k^2 & k-1 \\ 0 & 0 & k-k^2 & 1-k \end{array}\right).$$

Se $k = 0$ il rango della matrice incompleta è 2 ed il rango della matrice completa è 3 perciò il sistema non ha soluzioni.
Se $k = 1$ il rango della matrice completa è uguale al rango della matrice incompleta ed è uguale a 2. Il sistema di partenza risulta equivalente al sistema

$$\begin{cases} x + z &= 1 \\ 2y + z &= 0 \end{cases}$$

che ha infinite soluzioni della forma: $\{(1-t, -t/2, t)\} = (1,0,0) + \langle(-1,-1/2,1)\rangle$.
Se $k \notin \{0,1\}$ la matrice incompleta e la matrice completa hanno rango massimo (=3). Il sistema ha dunque una ed una sola soluzione: il sistema di partenza è equivalente al seguente:

$$\begin{cases} x + kz = 1 \\ 2y + k^2z = k - 1 \\ kz = 1 \end{cases}$$

e la sua unica soluzione è $(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{k})$. In particolare se $k = 2$ il sistema ha l'unica soluzione $(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Esercizio 3. *Si consideri il seguente sottoinsieme di $M_2(\mathbf{R})$:*

$$S = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a - c = 0; \quad 2b + d = 0\}.$$

1. *Dimostrare che S è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbf{R})$.*
2. *Calcolare la dimensione di S ed esibire una sua base.*
3. *Determinare, se possibile, un sottospazio vettoriale W_1 di $M_2(\mathbf{R})$ tale che $\dim W_1 = 2$ e $S \oplus W_1 = M_2(\mathbf{R})$.*
4. *Determinare, se possibile, un sottospazio vettoriale W_2 di $M_2(\mathbf{R})$ tale che $\dim(W_2) = 3$ e $S \oplus W_1 = M_2(\mathbf{R})$.*

Svolgimento. Abbiamo:

$$S = \{\begin{pmatrix} a & b \\ a & -2b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbf{R}\}.$$

1. Dobbiamo dimostrare che S è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari definiti in $M_2(\mathbf{R})$.
Siano $\begin{pmatrix} a & b \\ a & -2b \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & -2\beta \end{pmatrix}$ due matrici di S. È facile verificare che la loro somma:

$$\begin{pmatrix} a+\alpha & b+\beta \\ a+\alpha & -2b-2\beta \end{pmatrix}$$

è ancora un elemento di S. In modo analogo si proceda per il prodotto di un numero reale per una matrice di S.
2. L'insieme S è generato dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

I due generatori $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti perché non sono proporzionali, dunque individuano una base di S.
3. Siccome $\dim S = 2$ e $\dim M_2(\mathbf{R}) = 4$ è possibile determinare un sottospazio W_1 di $M_2(\mathbf{R})$ tale $S \oplus W_1 = M_2(\mathbf{R})$: basta scegliere

$$W_1 = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Infatti, scritte le coordinate dei generatori di S e di W_1 rispetto alla base canonica di $M_2(\mathbf{R})$ come righe della matrice M:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

risulta $rg(M) = 4$.

4. Non esiste alcun sottospazio W_2 di $M_2(\mathbf{R})$ con $\dim W_2 = 3$ e tale $S \oplus W_2 = M_2(\mathbf{R})$ per la formula di Grassmann.

Domanda 1. *Sia L l'endomorfismo di $\mathbf{R}^2$ la cui matrice rispetto alle basi canoniche è $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Stabilire se esistono delle basi di $\mathbf{R}^2$ rispetto alle quali L abbia matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.*

Risposta. Poiché $rg \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$, $\dim Im(L) = 1$. Ora $rg \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$; pertanto questa matrice non può essere matrice di L rispetto a nessuna base di $\mathbf{R}^2$.

Domanda 2. *Esiste un'applicazione lineare $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ tale che $g(1,0,1) = (2,1)$, $g(2,1,2) = (-1,5)$, $g(1,1,1) = (-3,4)$, $g(2,-1,1) = (0,0)$?*
In caso affermativo si dica se una siffatta g è unica.

Risposta. Osserviamo preliminarmente che i vettori $\{(1,0,1), (1,1,1), (2,-1,1)\}$ sono linearmente indipendenti e dunque individuano una base di $\mathbf{R}^3$.
Si ha inoltre: $(2,1,2) = (1,0,1) + (1,1,1)$. La definizione data di g è compatibile con la richiesta di linearità, si ha infatti:

$$g(2,1,2) = (-1,5) = (2,1) + (-3,4) = g(1,0,1) + g(1,1,1).$$

Una funzione g come richiesta esiste, dunque, ed è unica poiché è definita sui vettori di una base di $\mathbf{R}^3$.