LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTE - TERRITORIO
CORSO DI MATEMATICA 2
Padova 27-10-07
Correzione del tema n.1

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

a) Una funzione lineare $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ è sempre suriettiva.

b) Un insieme finito di vettori tutti diversi dal vettore nullo è un insieme di vettori linearmente indipendenti.

c) Se un sistema lineare ha due soluzioni distinte allora ne ha infinite.

Risposte.
a) FALSO: la funzione nulla $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0)$ non è suriettiva.
b) FALSO: i vettori $(1, 0)$ e $(2, 0)$ non sono nulli, ma $\{(1, 0), (2, 0)\}$ è un insieme di vettori dipendenti.
c) VERO: se s_1, s_2 sono due soluzioni, tutti i vettori della varietà lineare $s_1 + < s_2 - s_1 >$ sono anch'essi soluzioni; se $s_1 \neq s_2$ questo è un insieme infinito.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il sistema lineare:

$$\begin{cases} x + 2y - \alpha z = 1 \\ 2x - y = -3 \\ \alpha x - 5z = 5 \end{cases}$$

ammette soluzione. Per quali valori di α la soluzione non è unica? Deteminare le soluzioni per tali valori.

Svolgimento. Riducendo in forma a scala la matrice del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -\alpha & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ \alpha & 0 & -5 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -\alpha & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5}\alpha & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5}\alpha^2 - 5 & \alpha + 5 \end{array}\right)$$

troviamo che il sistema è risolubile per $\alpha \neq 5$. Per $\alpha \neq \pm 5$ ha un'unica soluzione, mentre per $\alpha = -5$ l'insieme delle soluzioni è $(-1, 1, 0) + \langle(-1, -2, 1)\rangle$.

Esercizio 2 Sia $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto (a + b + 2c + d, b + c + d, -a + b).$$

Determinare il nucleo e l'immagine di f. Determinare poi la controimmagine del vettore $(1, 1, -1)$ mediante f.

Svolgimento. Poiché $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$, per il teorema delle dimensioni il nucleo di f sarà certamente non nullo.

Scriviamo la matrice della f rispetto alle basi canoniche di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ed $\mathbb{R}^3$ e riduciamola in forma a scala:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La dimensione di $\operatorname{Im} f$ è uguale al rango di A, cioè 3, quindi f è suriettiva. Il nucleo è il sottospazio delle matrici di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le cui coordinate sono soluzioni del sistema omogeneo $AX = 0$, quindi

$$\ker f = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Poiché f è suriettiva, la controimmagine del vettore $(1, 1, -1)$ mediante f è certamente non vuota: è la varietà lineare di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formata dalle matrici le cui coordinate sono soluzioni del sistema non omogeneo $AX = (1, 1, -1)^t$. Dalla riduzione

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

risulta quindi che

$$f^{-1}(1, 1, -1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Esercizio 3 Sia S_k il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 0, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (-1 + k, -3 + k, 0)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

a) Calcolare la dimensione di S_k al variare di k.

b) Posto $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - 2z = 0\}$, determinare $S_k \cap T$ e $S_k + T$ al variare di k.

c) Posto $k = 2$, determinare, se possibile, un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ tale che $S_2 \oplus W = T \oplus W = \mathbb{R}^3$.

d) Costruire, se possibile, una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(v) = v$ per ogni $v \in T$ e $\ker(f) \subset S_2$. Stabilire se esiste una sola funzione lineare soddisfacente le condizioni richieste.

Svolgimento. La dimensione di S_k è uguale al rango della matrice

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ k-1 & k-3 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2-k \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 2 \\ 3 & \text{se } k \neq 2 \end{cases}.$$

Se $k \neq 2$ quindi, $S_k = \mathbb{R}^3$ ed in particolare $S_k \cap T = T$ e $S_k + T = S_k = \mathbb{R}^3$ *per ogni* sottopazio T di $\mathbb{R}^3$.

Una base di S_2 è data dai vettori non proporzionali $(1, 1, 1)$ e $(2, 0, 1)$. Il generico vettore $\lambda(1, 1, 1) + \mu(2, 0, 1) = (\lambda + 2\mu, \lambda, \lambda + \mu)$ di S_2 appartiene a T se e solo se le sue coordinate sono soluzioni dell'equazione che definisce T, quindi deve essere:

$$\lambda + 2\mu - \lambda - 2(\lambda + \mu) = -2\lambda = 0$$

da cui risulta che $S_2 \cap T = \langle (2, 0, 1) \rangle$.

T è lo spazio delle soluzioni di un sistema omogeneo di rango 1, dunque $\dim T = 2$. Per la formula di Grassmann,

$$\dim(S_2 + T) = 2 + 2 - 1 = 3$$

quindi $S_2 + T = \mathbb{R}^3$.

Ancora per la formula di Grassmann, se W è un sottospazio che soddisfa le richieste, $\dim W = 1$. Basta quindi trovare un vettore di $\mathbb{R}^3$ che non appartenga né a S_2 né a T. Dalla riduzione a scala fatta in precedenza, risulta che $(0,0,1)$ è indipendente da $(1,1,1)$ e $(2,0,1)$, quindi $(0,0,1) \notin S_2$; inoltre $(0,0,1) \notin T$, dato che non è soluzione dell'equazione $x - y - 2z = 0$. Possiamo quindi scegliere $W = \langle(0,0,1)\rangle$.

Poiché $S_2 \cap T = \langle(2,0,1)\rangle$, il nucleo di una applicazione lineare f che soddisfi le ipotesi sarà contenuto propriamente in S_2, dato che deve essere $f(2,0,1) = (2,0,1)$. Quindi $\ker f = \langle u\rangle$ per un vettore u tale che $S_2 = \langle u, (2,0,1)\rangle$.
Poiché $T = \langle(2,0,1), (0,2,-1)\rangle$, abbiamo che $\{(2,0,1), (0,2,-1), u\}$ formano una base di $S_2 + T = \mathbb{R}^3$. Per ogni scelta di u (ad esempio $u = (1,1,1)$, le condizioni

$$f(2,0,1) = (2,0,1), \qquad f(0,2,-1) = (0,2,-1), \qquad f(u) = (0,0,0)$$

individuano un'unica applicazione lineare f che soddisfa le ipotesi. L'applicazione non è unica perché esistono infinite possibili scelte per il vettore u.