CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA, AMBIENTE - TERRITORIO
Padova 28-03-09
I prova parziale
Correzione del TEMA n.1

Parte 1. Quesiti preliminari.
Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata). **Qualora non si risponda in maniera corretta e ben motivata ad almeno 2 di questi 3 quesiti il compito verrà considerato gravemente insufficiente e non verrà corretto il resto dell'elaborato**.

a) Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare. Se $\mathrm{Im}\,(f) =< f(v_1), f(v_2) >$ allora v_1, v_2 generano $\mathbb{R}^2$.

b) Sia $U_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = \alpha\} \subset \mathbb{R}^3$. Per ogni valore di $\alpha \in \mathbb{R}$, U_α è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

c) Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare. Allora $\mathrm{Ker}\, f$ e $\mathrm{Im}\, f$ possono essere in somma diretta.

Risposte

a) FALSO: se $f(v_1)$ e $f(v_2)$ sono dipendenti, potrebbe darsi che v_1 e v_2 sono dipendenti, nel qual caso non possono generare $\mathbb{R}^2$.

b) FALSO: per $\alpha \neq 0$, il vettore nullo non appartiene ad U_α.

c) FALSO: $\mathrm{Ker}\, f \subseteq \mathbb{R}^3$ ed $\mathrm{Im}\, f \subseteq \mathbb{R}^4$ non appartengono allo stesso spazio e quindi non sono confrontabili.

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1. Si considerino V_1 e V_2 i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{aligned} V_1 = &\ < (1, 0, 1, 1, 0), (-1, 1, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1, -1) > \\ V_2 = &\ < (0, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 2, 2, 1), (1, 0, 1, 1, 1) > \end{aligned}$$

i) Determinare una base B_1 di V_1 e una base B_2 di V_2. Calcolare $\dim(V_1)$ e $\dim(V_2)$.

ii) Determinare una base di $V_1 \cap V_2$ e una base di $V_1 + V_2$. Quanto valgono $\dim(V_1 \cap V_2)$ e $\dim(V_1 + V_2)$? I sottospazi V_1 e V_2 sono in somma diretta?

iii) Scrivere se possibile il vettore $v = (1, 0, 1, 1, 0)$ come somma $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ e $v_1 \neq (0, 0, 0, 0, 0)$ e $v_2 \neq (0, 0, 0, 0, 0)$. Tale scrittura è unica?

iv) Determinare $S \leq \mathbb{R}^5$ tale che $S \oplus (V_1 \cap V_2) = V_1 + V_2$. È unico?

v) Per ogni possibile scelta di S tale che $S \oplus (V_1 \cap V_2) = V_1 + V_2$ determinare $\dim(S \cap V_1)$ e $\dim(S \cap V_2)$.

Svolgimento. Riducendo in forma a scala la matrice che ha sulle righe i generatori di V_1

$$P = I_3; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

troviamo che i generatori assegnati sono linearmente indipendenti, quindi formano una base, che chiameremo B_1. Quindi $\dim V_1 = 3$.
Analogamente, riducendo in forma a scala la matrice che ha sulle righe i generatori di V_2

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \; A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \; L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \; U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

troviamo che anche i generatori assegnati per V_2 sono linearmente indipendenti e quindi formano una base, che chiameremo B_2. Quindi $\dim V_2 = 3$.

Imponiamo al generico vettore di V_1

$$\alpha(1,0,1,1,0) + \beta(-1,1,0,0,1) + \gamma(0,0,0,1,-1) = (\alpha - \beta, \beta, \alpha, \alpha + \gamma, \beta - \gamma)$$

di appartenere anche a V_2:

$$P = I_4; \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha - \beta & \beta & \alpha & \alpha + \gamma & \beta - \gamma \end{pmatrix};$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ \alpha - \beta & 2\beta - \alpha & \gamma & 1 \end{pmatrix}; \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

Il vettore appartiene a $V_2 \Leftrightarrow \gamma = 0$, pertanto

$$V_1 \cap V_2 = < (1,0,1,1,0), (-1,1,0,0,1) > .$$

Dunque $\dim(V_1 \cap V_2) = 2$, quindi la somma $V_1 + V_2$ non è diretta. Dalla formula di Grassmann ricaviamo che $\dim(V_1 + V_2) = 3 + 3 - 2 = 4$. Una base per tale spazio si trova unendo alla base trovata di $V_1 \cap V_2$ un vettore di V_1 ed un vettore di V_2 che non appartengono a tale intersezione. Possiamo prendere

$$V_1 + V_2 = < (1,0,1,1,0), (-1,1,0,0,1), (0,0,0,1,-1), (1,1,2,2,1) > .$$

[$(0,0,0,1,-1) \notin V_1 \cap V_2$ segue dal calcolo appena fatto (corrisponde al caso $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$) mentre per $(1,1,2,2,1)$ occorre fare una piccola verifica che omettiamo]

Poiché la somma non è diretta, la scrittura di un vettore di $V_1 + V_2$ come somma di un vettore di V_1 e di uno di V_2 non è unica. Dato che il vettore $(1,0,1,1,0)$ appartiene a $V_1 \cap V_2$. La scrittura che richiede il minimo sforzo si ottiene sottraendo e sommando il secondo generatore di $V_1 \cap V_2$

$$(1,0,1,1,0) = [(1,0,1,1,0) - (-1,1,0,0,1)] + [(-1,1,0,0,1)] .$$

Infatti i due vettori in parentesi appartengono ancora a $V_1 \cap V_2$ e, in particolare, il primo appartiene a V_1 ed il secondo a V_2.

Per la formula di Grassmann, ogni sottospazio $S \subseteq \mathbb{R}^5$ tale che $S \oplus (V_1 \cap V_2) = V_1 + V_2$ ha dimensione $\dim S = \dim(V_1 + V_2) - \dim(V_1 \cap V_2) = 4 - 2 = 2$. Ogni tale sottospazio è generato da due vettori che, aggiunti alla base di $V_1 \cap V_2$, la completino ad una base di $V_1 + V_2$, ad esempio

$$S = < (0,0,0,1,-1), (1,1,2,2,1) > .$$

La scelta, e quindi lo spazio S, non è unica. Ad esempio avremmo potuto prendere $(0,0,0,0,1) \in V_2$ (ultima riga della matrice U, ridotta della matrice dei generatori di V_2) in vece di $(1,1,2,2,1)$ e quindi $S' = < (0,0,0,1,-1), (0,0,0,0,1) >$ verifica $S' \oplus (V_1 \cap V_2) = V_1 + V_2$.

Per ogni sottospazio S tale che $S \oplus (V_1 \cap V_2) = V_1 + V_2$, abbiamo che

$$V_1 + V_2 = S \oplus (V_1 \cap V_2) \subseteq S + V_1 \subseteq V_1 + V_2$$

da cui ricaviamo che $S + V_1 = V_1 + V_2$, quindi $\dim(S + V_1) = \dim(V_1 + V_2) = 4$. Dalla formula di Grassmann segue quindi che

$$\dim(S \cap V_1) = \dim S + \dim V_1 - \dim(S + V_1) = 3 + 2 - 4 = 1.$$

Ragionando allo stesso modo con V_2 in vece di V_1, concludiamo che $\dim(S \cap V_1) = 1$.

Esercizio 2.

1) Esiste $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ lineare tale che

- $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f =< (1,0,0,1), (0,1,0,0) >$;
- $f(0,0,1,1) = (1,0,0,1)$.

È unica?

2) Esiste $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ lineare tale che

- $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} g =< (1,0,0,1), (0,1,0,0) >$;
- $g(0,0,1,1) = (1,0,0,1)$
- $g(1,0,0,0) = (0,1,0,0)$.

È unica?

Svolgimento. 1) I vettori $(1,0,0,1)$ e $(0,1,0,0)$ sono linearmente indipendenti, quindi si richiede che $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} f = 2$, il che è compatibile con il teorema delle dimensioni. Il vettore $(0,0,1,1) \notin< (1,0,0,1), (0,1,0,0) >$. Infatti, se mettiamo i tre vettori in matrice, questa è già in forma a scala di rango 3. Quindi $(0,0,1,1) \notin \operatorname{Ker} f$, il che è compatibile con la richiesta che la sua immagine sia $(1,0,0,1) \neq \mathbf{0}$. Infine $(1,0,0,1) \in \operatorname{Im} f$, quindi le richieste sono coerenti.

Un'applicazione lineare è determinata dai suoi valori sui vettori di una base. Abbiamo i valori di f su tre vettori indipendenti:

$$f(1,0,0,1) = (0,0,0,0); \qquad f(0,1,0,0) = (0,0,0,0); \qquad f(0,0,1,1) = (1,0,0,1). \tag{1}$$

Per determinare la f ci occorre il valore in un quarto vettore indipendente da $(1,0,0,1), (0,1,0,0)$, $(0,0,1,1)$. Si vede immediatamente che possiamo scegliere il vettore $\mathbf{e}_4 = (0,0,0,1)$ (la matrice dei quattro vettori è in forma a scala di rango 4).
Dobbiamo assegnare $f(\mathbf{e}_4)$ in modo che $\operatorname{Im} f =< (1,0,0,1), (0,1,0,0) >$. La scelta ovvia è

$$f(0,0,0,1) = (0,1,0,0).$$

Questa condizione con quelle di (1) definisce un'unica applicazione f che soddisfa tutte le richieste. Abbiamo fatto due scelte: il quarto generatore di $\mathbb{R}^4$ e la sua immagine, quindi f non è unica: avremmo potuto scegliere $f(0,0,0,1) = (0,2,0,0)$, e questa sarebbe stata un'altra possibile f.

2) In base a quanto detto sopra, dobbiamo verificare che i vettori $(1,0,0,1), (0,1,0,0), (0,0,1,1)$, $(1,0,0,0)$ formano una base di $\mathbb{R}^4$:

$$P = I_4; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque $\operatorname{rg} A = 4$ e quindi i quattro vettori formano un base di $\mathbb{R}^4$. Pertanto le condizioni

$$g(1,0,0,1) = g(0,1,0,0) = (0,0,0,0); \quad g(0,0,1,1) = (1,0,0,1); \quad g(1,0,0,0) = (0,1,0,0)$$

definiscono un'unica applicazione $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ che soddisfa tutte le richieste.

Esercizio 3. Si considerino le applicazioni lineari $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ definite da:

$$f_\alpha(x,y,z) = (\alpha x + y + (\alpha - 1)z, z, \alpha x + y)$$

a) Determinare base e dimensione di $\operatorname{Ker} f_\alpha$ e di $\operatorname{Im} f_\alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Calcolare base e dimensione di

$$K = \operatorname{Ker} f_0 + \operatorname{Ker} f_1 + \operatorname{Ker} f_2 + \operatorname{Ker} f_3$$

e

$$I = \operatorname{Im} f_0 \cap \operatorname{Im} f_1 \cap \operatorname{Im} f_2 \cap \operatorname{Im} f_3.$$

c) Determinare se esiste (definendola su una base) un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ non nulla tale che $\operatorname{Ker} g \supseteq \operatorname{Ker} f_\alpha$ e $\operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Im} f_\alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Scriviamo la matrice di f_α rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$:

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La prima colonna è multiplo della seconda, mentre $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, la seconda e terza colonna sono indipendenti. Quindi

$$\operatorname{Im} f_\alpha =< (1,0,1), (\alpha - 1, 1, 0) >$$

ha dimensione 2 per ogni α. Per il teorema delle dimensioni, $\dim \operatorname{Ker} f_\alpha = 3 - \dim \operatorname{Im} f_\alpha = 1$. Il nucleo si trova risolvendo il sistema lineare omogeneo di matrice M_α. La prima riga di M_α è la somma della seconda e della terza. Il sistema è quindi equivalente a

$$\begin{cases} z = 0 \\ \alpha x + y = 0 \end{cases} \implies \operatorname{Ker} f_\alpha =< (1, -\alpha, 0) > .$$

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Ker} f_\alpha$ è contenuto nel sottospazio $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$, quindi $K \subseteq S$. D'altra parte

$$\operatorname{Ker} f_0 + \operatorname{Ker} f_1 =< (1,0,0), (1,-1,0) >= S$$

perché i due generatori sono indipendenti. Allora $S = \operatorname{Ker} f_0 + \operatorname{Ker} f_1 \subseteq K \subseteq S$ e quindi

$$K = S =< (1,0,0), (1,-1,0) > .$$

Analogamente, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} f_\alpha$ contiene il sottospazio $< (1,0,1) >$. Calcoliamo l'intersezione di $\operatorname{Im} f_0 =< (1,0,1), (-1,1,0) >$ con $\operatorname{Im} f_1 =< (1,0,1), (0,1,0) >$. Cerchiamo i vettori $\lambda(1,0,1) + \mu(0,1,0) = (\lambda, \mu, \lambda) \in \operatorname{Im} f_1$ che appartengono a $\operatorname{Im} f_0$:

$$P = I_3; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \lambda & \mu & \lambda \end{pmatrix}; \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \lambda & \mu & 1 \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}.$$

Quindi deve essere $\mu = 0$, cioè $\operatorname{Im} f_0 \cap \operatorname{Im} f_1 = \{(\lambda, 0, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} =< (1,0,1) >$. Siccome $(1,0,1) \in \operatorname{Im} f_\alpha$ per ogni α, allora $< (1,0,1) >\subseteq I \subseteq \operatorname{Im} f_0 \cap \operatorname{Im} f_1 =< (1,0,1) >$, dunque

$$I =< (1,0,1) > .$$

Dato che $\operatorname{Ker} g \supseteq \operatorname{Ker} f_\alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, deve essere che $\operatorname{Ker} g \supseteq K$. In particolare

$$g(1,0,0) = (0,0,0); \qquad g(1,-1,0) = (0,0,0). \tag{2}$$

Analogamente, da $\operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Im} f_\alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ segue che $\operatorname{Im} g \subseteq I$. Quindi

$$\dim \operatorname{Ker} g \geq \dim K = 2; \qquad \dim \operatorname{Im} g \leq \dim I = 1$$

Se vogliamo che g sia non nulla dovremo avere $\dim \operatorname{Im} g = 1$ e dal teorema delle dimensioni segue che $\dim \operatorname{Ker} g = 2$. Concludiamo che

$$\operatorname{Ker} g = K =< (1,0,0), (1,-1,0) >; \qquad \operatorname{Im} g = I =< (1,0,1) > .$$

Pertanto deve esistere un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tale che $g(\mathbf{v}) = (1,0,1)$. Essendo $g(\mathbf{v}) \neq (0,0,0)$, bisogna che $\mathbf{v} \notin \operatorname{Ker} g$. Quindi per determinare g basta determinare $\mathbf{v} \notin< (1,0,0), (1,-1,0) >$. Ad esempio, si verifica subito che $(0,0,1)$ è indipendente da $(1,0,0)$ e $(1,-1,0)$, quindi la condizione

$$g(0,0,1) = (1,0,1)$$

congiuntamente con le condizioni (2) definisce un'applicazione g che soddisfa le richieste.

La g non è unica. Ad esempio, si riconosce facilmente che anche $(1,0,1)$ è indipendente da $(1,0,0)$ e $(1,-1,0)$ e può essere preso come vettore $\mathbf{v}$. Si noti che l'applicazione definita da

$$(1,0,0) \longmapsto (0,0,0) \qquad (1,-1,0) \longmapsto (0,0,0); \qquad (1,0,1) \longmapsto (1,0,1)$$

non è altro che la proiezione su $I =< (1,0,1) >$ secondo $K =< (1,0,0), (1,-1,0) >$.