CORSO DI MATEMATICA 2 - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA, CHIMICA-MATERIALI, AMBIENTE E TERRITORIO

Padova 29-08-2006

Correzione del tema n.1

Esercizio 1. Esiste un sistema lineare che abbia tra le soluzioni $(1,-1,3)$, $(1,1,-1)$ e $(1,0,1)$? In caso affermativo, scriverne uno e determinarne tutte le soluzioni.

Svolgimento. C'è l'imbarazzo della scelta. Si può osservare che i vettori assegnati sono linearmente dipendenti

$$(1,-1,3) = -(1,1,-1) + 2(1,0,1)$$

pertanto il sistema omogeneo di soluzioni $< (1,1,-1),(1,0,1) >$, cioè il piano $x-2y-z=0$, soddisfa le richieste.
Più banalmente, si può osservare che i tre vettori soddisfano la condizione $x=1$: l'insieme delle soluzioni di questo sistema non omogeneo è $(1,-1,3)+ < (0,1,0),(0,0,1) >$.
Il sistema più semplice è il sistema nullo

$$0x + 0y + 0z = 0$$

che ammette come insieme delle soluzioni $\mathbb{R}^3$ (e quindi i tre vettori assegnati sono tra le soluzioni).

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\alpha \\ 2 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

i) Esistono valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la matrice A_α sia ortogonale?

ii) Esistono valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali $(1,1,1)$ sia autovettore di A_α?

iii) Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste una matrice ortogonale H che diagonalizza A_α? Determinare tale matrice H per i valori trovati.

Svolgimento. La matrice A_α è ortogonale per quei valori di α per cui $A_\alpha A_\alpha^T = I$. Ma

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -\alpha \\ 2 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & \alpha & 1 \\ -\alpha & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+\alpha^2 & 2+\alpha & 2-\alpha \\ 2+\alpha & 5+\alpha^2 & 2+3\alpha \\ 2-\alpha & 2+3\alpha & 5+\alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

impone le condizioni $\begin{cases} 2+\alpha = 0 \\ 2-\alpha = 0 \end{cases}$ che non sono verificate per nessun valore di α. Quindi A_α non è mai ortogonale.
Calcolando

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -\alpha \\ 2 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\alpha \\ 3+\alpha \\ 3+\alpha \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ricaviamo $\begin{cases} 3-\alpha = \lambda \\ 3+\alpha = \lambda \end{cases}$ che ammette come unica soluzione $\alpha = 0$ e $\lambda = 3$. Pertanto $(1,1,1)$ è autovettore solo per $\alpha = 0$ ed in questo caso appartiene all'autospazio $V(3)$.
Una matrice è ortogonalmente diagonalizzabile se e solo se è simmetrica ed A_α è simmetrica solo per $\alpha = 0$. Il polinomio caratteristico di A_0 è $p(t) = -t^3 + 3t^2 + 3t - 9 = -(t-3)(t^2-3)$. Gli

autovalori sono quindi 3 (che conoscevamo già dal punto ii), $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$, tutti di molteplicità algebrica (e quindi geometrica) 1. Possiamo quindi concludere che $V(3) =< (1,1,1) >$. Calcoliamo poi

$$V(\sqrt{3}) = \ker \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} & 2 & 0 \\ 2 & -\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 1 & 2-\sqrt{3} \end{pmatrix} =< (1-\sqrt{3}, \sqrt{3}-2, 1) >;$$

$$V(-\sqrt{3}) = \ker \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 2 & 0 \\ 2 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 1 & 2+\sqrt{3} \end{pmatrix} =< (1+\sqrt{3}, -\sqrt{3}-2, 1) > .$$

Una base ortonormale di autovettori (colonne della matrice H cercata) è quindi

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{3-\sqrt{3}}(1-\sqrt{3}, \sqrt{3}-2, 1), \frac{1}{3+\sqrt{3}}(1+\sqrt{3}, -\sqrt{3}-2, 1).$$

Esercizio 3.

i) Dimostrare che esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che verifica le seguenti condizioni:

$$f(1,0,1) = (0,1,-1);\ f(1,2,2) = (1,0,1);\ f(0,1,1) = (1,1,0);\ f(0,0,1) = (1,3,-2).$$

ii) Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica.

iii) Determinare nucleo ed immagine di f.

iv) Dati i sottospazi $U =< (1,0,1), (1,2,2) >$ e $W =< (0,1,1), (0,0,1) >$ di $\mathbb{R}^3$, è vero che $f(U \cap W) = f(U) \cap f(W)$?

Svolgimento. I vettori $(1,0,1), (1,2,2), (0,1,1)$ sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di $\mathbb{R}^3$, dunque esiste un'unica applicazione lineare f che soddisfa le prime tre condizioni. Pertanto, se esiste un'applicazione che soddisfi tutte e quattro le condizioni date, questa sarà unica. Il vettore $(0,0,1)$ si esprime come combinazione lineare dei primi tre

$$(0,0,1) = (1,0,1) - (1,2,2) + 2(0,1,1)$$

e l'applicazione cercata esiste se le immagini assegnate soddisfano la medesima relazione di dipendenza

$$f(0,0,1) = f(1,0,1) - f(1,2,2) + 2f(0,1,1)$$

cosa che si verifica immediatamente:

$$(1,3,-2) = (0,1,-1) - (1,0,1) + 2(1,1,0).$$

Per scrivere la matrice della f dobbiamo determinare le immagini dei vettori della base canonica:

$$(1,0,0) = (1,2,2) - 2(0,1,1) \Rightarrow f(1,0,0) = (1,0,1) - 2(1,1,0) = (-1,-2,1);$$

$$(0,1,0) = (0,1,1) - (0,0,1) \Rightarrow f(1,0,0) = (1,1,0) - (1,3,-2) = (0,-2,2).$$

Quindi la matrice della f rispetto alla base canonica è

$$M = M(f;\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

[In alternativa, visto che conosciamo la matrice $M(f;\mathcal{B},\mathcal{E})$ di f rispetto alla base canonica nel codominio ed alla base $\mathcal{B}=\{(1,0,1),(1,2,2),(0,1,1)\}$ nel dominio, avremmo potuto calcolare $M(f;\mathcal{E})=M(f;\mathcal{B},\mathcal{E})M(id;\mathcal{E},\mathcal{B})$. Tuttavia, questo metodo non è conveniente in questo caso per il numero di calcoli che comporta.]
Riducendo in forma a scala la matrice M

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

troviamo che questa ha rango 2. Pertanto l'immagine di f ha dimensione 2; come generatori possiamo prendere i vettori indipendenti $(0,1,-1)$ e $(1,0,1)$, oppure le prime due colonne di M. Il nucleo di f è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $MX=0$, quindi $\ker f =<(2,1,2)>$.

I generatori di U e W sono rispettivamente i primi due e gli ultimi due vettori assegnati. Da quanto visto risulta quindi che $f(U)$ ed $f(W)$ sono sottospazi di dimensione 2 di $\operatorname{Im} f$, che ha essa stessa dimensione 2. Quindi $f(U)=\operatorname{Im} f=f(W)$ e dunque $f(U)\cap f(W)=\operatorname{Im} f$ ha ancora dimensione 2.
D'altra parte, i vettori di W hanno tutti la prima coordinata uguale a 0, quindi $(1,0,1)\notin W$; dunque $\dim(U\cap W)\le 1$. [Calcolando troviamo $U\cap W=<(0,2,1)>$.] Poiché le applicazioni lineari conservano le relazioni di dipendenza, la dimensione dell'immagine di un sottospazio non può essere maggiore della dimensione dello spazio di partenza; pertanto $\dim f(U\cap W)\le 1$. Quindi non è possibile che $f(U\cap W)=f(U)\cap f(W)$, dato che il primo ha dimensione inferiore al secondo.

Esercizio 4. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si considerino i punti $P(1,1,-2)$ e $Q(-1,1,0)$.

i) Determinare la posizione dei punti P e Q rispetto al piano $\pi: x+y+z=0$.

ii) Dimostrare che esiste un'unica retta r nel piano $\pi: x+y+z=0$ i cui punti hanno uguale distanza da P e Q e determinarla.

iii) Detta r' la retta per P e Q, stabilire quale tra r ed r' ha distanza minore dalla retta

$$s:\begin{cases} x+z=0 \\ y=1 \end{cases}.$$

Svolgimento. Le coordinate dei punti soddisfano l'equazione di π, quindi i punti appartengono al piano.
Il luogo dei punti dello spazio che hanno uguale distanza da P e Q è l'asse del segmento PQ, cioè il piano ortogonale alla direzione $Q-P=(-2,0,2)$ passante per il punto medio $M(0,1,-1)$ del segmento. L'asse è quindi il piano $x-z=1$ ed intersecandolo con il piano π troviamo la retta r cercata:

$$r:\begin{cases} x-z=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}.$$

Per determinare la posizione reciproca di r ed s, consideriamo il sistema delle equazioni delle due rette e ne studiamo la matrice associata:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Il rango della matrice completa è 4, quello della matrice incompleta 3 quindi r ed s sono sghembe.
Il piano σ del fascio di asse s

$$\lambda(x+z)+\mu(y-1)=0$$

parallelo allla direzione $(1, -2, 1)$ di r corrisponde alla condizione $2\lambda - 2\mu = 0$; quindi l'equazione di σ è $x + y + z - 1 = 0$. Abbiamo già il punto $M \in r$, quindi possiamo calcolare

$$d(r, s) = d(M, \sigma) = \frac{|-1|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

La retta r' per P e Q ha direzione $(1, 0, -1)$, la stessa di s, quindi le due rette sono parallele. Un piano ortogonale ad entrambe è per esempio il piano $x - z = 1$ trovato precedentemente (asse del segmento PQ). Questo piano incontra r' nel punto M, mentre per determinare il punto di intersezione S con la retta s dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ x + z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

da cui ricaviamo che S ha coordinate $(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$. Quindi

$$d(r', s) = d(M, S) = \|(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e quindi r dista meno di r' da s.