Esercizi sulla forma canonica di Jordan

Esercizio 1 Per ciascuna delle seguenti matrici determinare una forma diagonale o una forma di Jordan; determinare inoltre la matrice H del cambiamento di base.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2 Date le matrici a coefficienti reali

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Determinare, se esistono, delle matrici $G, H \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$, con G diagonale o una matrice di Jordan ed H invertibile, tali che $E = HGH^{-1}$.
- Determinare, se esistono, delle matrici $G, H \in M(4 \times 4, \mathbb{C})$, con G diagonale o una matrice di Jordan ed H invertibile, tali che $E = HGH^{-1}$.
- Determinare, se esistono, delle matrici $J, K \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$, con J diagonale o una matrice di Jordan e K invertibile, tali che $F = KJK^{-1}$.
- Determinare, se esistono, delle matrici $J, K \in M(4 \times 4, \mathbb{C})$, con J diagonale o una matrice di Jordan e K invertibile, tali che $F = KJK^{-1}$.
- Stabilire se E ed F sono simili, come matrici reali o complesse.
- Al variare di $t \in \mathbb{R}$, calcolare $\exp(tE)$ ed $\exp(tF) \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$.

Esercizio 3 Si consideri il sottospazio

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle \subset M(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

- Determinare il sottoinsieme S delle matrici di W che ammettono 2 come autovalore. S è un sottospazio? È una varietà lineare?
- Determinare quali tra le matrici di S sono diagonalizzabili.
- Determinare quali tra le matrici di S sono simili ad una matrice di Jordan con un solo blocco.
- Determinare quali tra le matrici di S sono simili ad una matrice di Jordan con due blocchi.

Esercizio 4 Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale omogenea

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

Soluzioni

Esercizio 1 B è diagonalizzabile. Le forme di Jordan di A e di C sono rispettivamente

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

La forma di Jordan di D e la matrice del cambiamento di base sono rispettivamente

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right); \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2 Il polinomio caratteristico è lo stesso: $p(t) = (t^2 + 1)^2 = (t - i)^2(t + i)^2$. Pertanto le due matrici non sono diagonalizzabili e non hanno una forma di Jordan reale. E è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$ ma F no. Dunque E ed F non sono simili su $\mathbb{C}$ ed a fortiori neanche su $\mathbb{R}$. Si ha:

$$G = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} -i & i & i & -i \\ 0 & -i & 0 & i \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \exp(tE) = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & -\sin t & \sin t \\ 0 & \cos t & 0 & -\sin t \\ \sin t & \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & \sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix}$$

$$J = \left(\begin{array}{cc|cc} -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{array} \right); \quad K = \begin{pmatrix} -i & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & -i \end{pmatrix}; \quad \exp(tF) = \begin{pmatrix} \cos t & t \cos t & -\sin t & -t \sin t \\ 0 & \cos t & 0 & -\sin t \\ \sin t & t \sin t & \cos t & t \cos t \\ 0 & \sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix}$$

Esercizio 3 S è una varietà lineare:

$$S = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 2 & b+c & 0 \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \mid b, c \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

C'è un solo autovalore, quindi il numero di blocchi è pari alla molteplicità geometrica:

$$m_g(2) = 3 - \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & b+c & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 3 & \text{se } b = c = 0 \\ 2 & \text{se } b = -c \neq 0 \text{ o } b \neq 0 = c \\ 1 & \text{se } c(b+c) \neq 0 \end{cases}$$

In particolare, la sola matrice diagonalizzabile di S è la matrice diagonale $2I_3$.

Esercizio 4 La soluzione generale è $y = c_0 e^t + c_1 t e^t + c_2 t^2 e^t$.