

FOGLIO DI ESERCIZI NUMERO 3
CORSO DI MATEMATICA II - INGEGNERIA MECCANICA

A. Diagonalizzazione di matrici e prodotti scalari

1. Considerato l'endomorfismo f di $\mathbf{R}^3$ associato, rispetto alla base canonica, alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si verifichi se esso è diagonalizzabile.

2. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ l'endomorfismo f di $\mathbf{R}^3$ associato, rispetto alla base canonica, alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile. Per ciascuno dei valori trovati determinare una base di $\mathbf{R}^3$ costituita da autovettori di f e, quando possibile, una base ortonormale di autovettori di f .

3. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbf{R}^3$ definito nel modo seguente:

$$f(x, y, z) = (-y, -x, z).$$

Si determini una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ costituita da autovettori di f .

4. La matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile? Determinare, se possibile, una matrice H non ortogonale che diagonalizzi la matrice A ed una matrice ortogonale K che diagonalizzi A .

5. Sia $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita ponendo, per ogni $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$

$$f(x, y, z) = (\alpha y, y - x, z)$$

con $\alpha \in \mathbf{R}$.

- Stabilire per quali valori di α l'applicazione f è diagonalizzabile;

- Per $\alpha = -1$ determinare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ di autovettori di f .

6. In $\mathbf{R}^3$ dotato del prodotto scalare euclideo determinare una base ortonormale del sottospazio $S = \langle (-1, 0, 1), (2, -1, 0) \rangle$. Determinare, inoltre, il sottospazio $S^\perp$.

7. In $\mathbf{R}^3$, dotato del prodotto scalare canonico, determinare una base ortonormale del sottospazio $S = \langle (3, -1, 0), (0, 2, -2) \rangle$.

8. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ dotato del prodotto scalare canonico e in $\mathbf{R}^3$ si consideri il sottospazio S generato dai vettori $(1, -1, 0)$ e $(2, 1, 1)$. Determinare una base ortonormale di S ed estendere tale base ad una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.

9. Determinare, se possibile, una matrice ortogonale diagonalizzante la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

10. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^2$ dotato del prodotto scalare canonico e sia f l'endomorfismo di $\mathbf{R}^2$ tale che $f(1, 2) = (k+2, -3)$, $f(-1, 0) = (4, -2)$, $k \in \mathbf{R}$. Determinare il valore di k per il quale f è simmetrico.

[Risultato: $k = -2$.]

11. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ dotato del prodotto scalare canonico e sia f l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ che sui vettori della base $B = \{(1, 0, 2), (0, 0, 1), (1, 2, 2)\}$ agisce nel modo seguente:

$$f(1, 0, 2) = (0, 1, 2) \quad f(0, 0, 1) = (0, 0, 1) \quad f(1, 2, 2) = (2, 1, 2).$$

Determinare, se esiste, una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ costituita da autovettori di f .

B. Geometria affine ed euclidea del piano e dello spazio

1. Determinare la retta per $P = (4, -3)$ parallela al vettore $v = (-1, 2)$.

2. Nell'usuale piano euclideo scrivere l'equazione della retta s per $P = (2, 1)$ parallela alla retta r di equazione $2x - y - 1 = 0$. Scrivere inoltre l'equazione della retta t per lo stesso punto P e perpendicolare alla stessa retta r .

3. Dati i punti $A = (k, -2k + 1)$, $B = (-1, 2)$, $C = (2, 3)$, determinare il valore di k per il quale i tre punti sono allineati.

[Risultato: $k = -\frac{4}{7}$.]

4. Determinare k in modo tale che la retta t di equazione $kx - 2y + 2k = 0$ appartenga al fascio individuato dalle rette $r : x + y - 1 = 0$ e $s : \begin{cases} x = -h - 1 \\ y = 2h + 2 \end{cases}$.

[Risultato: $k = 4$.]

5. Siano r e r' le rette di equazioni rispettivamente $x + ky - 2 = 0$ e $(k - 2)x + y + 1 = 0$; determinare, se esistono, i valori di k per cui le due rette sono parallele e disgiunte e per cui coincidono.

[Soluzione: non coincidono per nessun valore di k , sono parallele per $k = 1 \pm \sqrt{2}$.]

6. Siano π e π' due piani dello spazio euclideo di equazioni rispettivamente $x - y + z - 1 = 0$ e $2x - y + 2z = 0$ e sia P il punto di coordinate $(1, 2, 1)$. Determinare le equazioni della retta r per P parallela a π e π' e la distanza di P da π' .

7. Siano r, s, t tre rette di equazioni:

$$r : \begin{cases} y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad t : \begin{cases} x = -\frac{2}{3}y + 1 \\ z = -1 \end{cases}.$$

Studiare la posizione reciproca delle rette r, s e t e determinare, se esistono, le rette incidenti simultaneamente le suddette rette.

8. Nello spazio euclideo usuale:

1) Determinare l'equazione del piano α passante per i punti $A = (1, 5, -2)$, $B = (3, 1, 6)$ e $C = (2, -4, 1)$.

2) Determinare le equazioni parametriche della retta r passante per i punti $P = (1, 2, 0)$ e $Q = (-1, 1, 1)$.

3) Determinare $\alpha \cap r$.

4) Determinare il piano passante per il punto $S = (1, 1, 2)$ e parallelo al piano α .

9. Determinare la retta t passante per l'origine e perpendicolare alle rette $r : \begin{cases} 4x - 2y + z = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$, $s : \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$.

10. Nel piano π di equazione $x - y + z = 0$ siano fissati i punti $P = (0, 1, 1)$ e $Q = (1, 1, 0)$. Si determinino le equazioni cartesiane della retta r , parallela alla retta passante per P e Q , e contenente il punto $R = (1, -1, 1)$.

11. Verificare se sono complanari i punti $P = (1, 2, 1)$, $Q = (2, 1, 0)$, $R = (-1, 0, -1)$ e $S = (0, 0, -1)$ e, in caso affermativo, determinare l'equazione del piano che li contiene.

12. Sia π il piano di equazione $x + y + z = 0$ e siano r ed s le rette di equazioni:

$$r : \begin{cases} y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 0 \\ 2y - z - 1 = 0 \end{cases}.$$

Determinare il piano π' contenente r e parallelo ad s ed il piano π'' contenente s e parallelo ad r . Determinare infine la retta t di π incidente r e s .

13. 1) Verificare se sono sghembe le seguenti rette:

$$r : \begin{cases} 3x + y - 2z - 2 = 0 \\ x - 3y + 2 = 0 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases}.$$

2) Determinare la retta parallela alla retta t di equazioni: $\begin{cases} x - 5 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases}$ ed incidente le rette r ed s .

14. Determinare le equazioni cartesiane della retta r passante per il punto $P = (2, 0, -1)$ e parallela ai piani $\pi : x + y - 3z + 2 = 0$ e $\pi' : x + 2z - 1 = 0$. Determinare inoltre le coordinate del punto P' proiezione ortogonale di P sul piano π .

[Soluzione: $r : \begin{cases} y - 5z - 5 = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$, $P' = (\frac{15}{11}, -\frac{7}{11}, \frac{10}{11})$.]

15. Determinare la distanza tra il piano π di equazione $3x + y - z = 0$ ed il piano π' di equazione $3x + y - z + 4 = 0$.

16. Si considerino le rette $r : \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - 3y + 2 = 0 \end{cases}$.

- Stabilire la posizione reciproca delle rette r e s ;
- Determinare i punti di minima distanza tra r ed s ;
- Calcolare la distanza tra le rette r e s .

17. Determinare la distanza del punto $P = (3, -1, 2)$ dalla retta r di equazioni cartesiane:

$$r : \begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}.$$