

ESERCIZI 13-10-03
CORSO DI MATEMATICA II - INGEGNERIA MECCANICA

Esercizio 1. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

trovare:

- a) una base del sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori riga di A ;
- b) una base del sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori colonna di A .

Esercizio 2. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbf{R}^4$:

$$v_1 = (1, 1, 0, 1), v_2 = (1, 1, 0, 0), v_3 = (0, 0, 0, 0), v_4 = (2, 2, 0, 3), \\ v_5 = (1, 0, 1, 1), v_6 = (2, 0, 2, 0), v_7 = (1, 7, 3, 2).$$

Si dimostri che essi individuano un sistema di generatori di $\mathbf{R}^4$ e si estragga una base di $\mathbf{R}^4$ dall'insieme $\{v_1, \dots, v_7\}$.

Esercizio 3. Determinare l'intersezione e la somma delle seguenti coppie di sottospazi:

- a) $W_1 = \langle (-2, 3, -2) \rangle$, $W_2 = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle$;
- b) $W_1 = \langle (1, -1, 1) \rangle$, $W_2 = \langle (1, 1, 0), (1, 2, 1) \rangle$;
- c) $W_1 = \langle (1, -1, 1), (1, 0, -1) \rangle$, $W_2 = \langle (1, 1, 0), (0, 1, 1) \rangle$.

Esercizio 4. Trovare due sottospazi W_1, W_2 di $\mathbf{R}^3$ tali che $\mathbf{R}^3 = W_1 + W_2$, ma $\mathbf{R}^3$ non è la somma diretta di W_1, W_2 .

Esercizio 5. Si consideri il seguente sottoinsieme di $M_2(\mathbf{R})$:

$$W = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + d = 0 \right\}.$$

- a) Verificare che W è un sottospazio di $M_2(\mathbf{R})$.

- b) Determinare una base di W .
- c) Trovare due sottospazi distinti W_1, W_2 di $M_2(\mathbf{R})$ tali che:

$$M_2(\mathbf{R}) = W \oplus W_1 = W \oplus W_2.$$

Esercizio 6. Dimostrare che gli insiemi

$$\mathcal{B}_1 = \{(2, 1), (-1, -1)\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{(-1, -3), (2, 3)\}$$

sono basi di $\mathbf{R}^2$. Determinare le coordinate dei vettori $(1, 3)$, $(2, -1)$ rispetto a tali basi. Quali sono le coordinate del vettore $(0, 1)_{\mathcal{B}_1}$ rispetto alla base $\mathcal{B}_2$?

Esercizio 7. Trovare un sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ chiuso rispetto alla somma ma non al prodotto per scalare ed un sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ chiuso rispetto al prodotto per scalare ma non alla somma.

Esercizio 8. Sia $T : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$T(x, y) = (x + y, x - y, y).$$

1. Si determini $\text{Ker}T$: se ne individui una base e se ne calcoli la dimensione. L'applicazione T è iniettiva?
2. Si determini $\text{Im}T$: se ne individui una base e se ne calcoli la dimensione. L'applicazione T è suriettiva?
3. Si costruisca, se possibile, un'applicazione lineare $S \neq T$,
 $S : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ tale che $\text{Ker}S = \text{Ker}T$ e $\text{Im}S = \text{Im}T$.

Esercizio 9. 1) Esiste un'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ tale che: $f(1, 0, 1) = (2, 0, 2)$, $f(1, 0, -1) = (1, 1, 1)$ e $f(0, 1, 0) = (1, 1, 1)$? In caso affermativo si dica se una siffatta applicazione è unica.

2) Esiste un'applicazione lineare $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ tale che: $g(1, 0, 1) = (2, 0, 2)$, $g(1, 0, -1) = (1, 1, 1)$ e $g(0, 0, 1) = (1, 1, 1)$? In caso affermativo si dica se una siffatta applicazione è unica.

3) Esiste un'applicazione lineare $h : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ tale che: $h(1, 0, 1) = (2, 0, 2)$, $h(1, 0, -1) = (1, 1, 1)$ e $h(0, 0, 1) = (1/2, -1/2, 1/2)$? In caso affermativo si dica se una siffatta applicazione è unica.

Esercizio 10. Si costruisca, se possibile, un'applicazione lineare

$$L : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$$

tale che: $\ker L = \langle (1, 0, 1), (1, 1, 0) \rangle$ e $\operatorname{Im} L = \langle (1, 0, 1) \rangle$.

Domande filtro.

1) Sia U un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V . Sia A un sottoinsieme di V . È vero che se $\langle A \rangle \subset U$ allora $A \subset U$?

2) Siano W_1, W_2 sottospazi di uno stesso sottospazio vettoriale V tali che $\dim W_1 > \dim W_2$. È vero che W_1 contiene W_2 ?

3) Il sottoinsieme $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 = x_2^2\} \subset \mathbf{R}^2$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^2$?

4) In $M_{3,4}(\mathbf{R})$ esiste un sottospazio vettoriale di dimensione 7?

5) Possono esistere un'applicazione lineare $\varphi : \mathbf{R}^6 \longrightarrow \mathbf{R}$ ed un sottospazio vettoriale $V \subset \mathbf{R}^6$ di dimensione 4 tali che $\{x \in \mathbf{R}^6 \mid \varphi(x) = 0\} \subset V$?

6) Siano w_1, w_2 due vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V . È vero che anche i vettori $w_1 + w_2, w_1 - w_2$ sono linearmente indipendenti?

7) Sia $\{v_1, v_2, v_3\}$ un sistema di generatori di uno spazio vettoriale V . Può $\{v_1, v_3\}$ essere una base di V ?

8) Siano $v_1, \dots, v_n$ vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V . L'insieme $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$?

9) Può esistere un'applicazione lineare $T : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ tale che $T(1, 2, 1) = (1, 0)$, $T(2, 1, 2) = (1, 1)$, $T(3, 3, 3) = (2, 1)$? In caso affermativo si dica se un'applicazione come richiesta è unica.

10) Possono esistere due applicazioni lineari diverse $S, T : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ tali che $\operatorname{Im} S = \operatorname{Im} T = \langle e_1 \rangle$?

11) Possono esistere due sottospazi vettoriali U_1, U_2 di $\mathbf{R}^4$ entrambi di dimensione 2 tali che $U_1 + U_2 = \mathbf{R}^4$ e $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$?

12) Una matrice a coefficienti reali con 8 righe e 12 colonne può avere rango 20?