ESERCIZI 2 febbraio 2005
Corso di Matematica 2
Ingegneria Meccanica - II squadra

Esercizio 1. Si consideri la seguente funzione f_s di $\mathbb{R}^3$ in se stesso:

$$f_s(x, y, z) = (x + y + z, x - y + s, sx + (s - 1)z).$$

1. Per quali valori di s l'applicazione f_s è lineare?
2. Per i valori di s trovati al punto 1.:
   - Determinare $\ker f_s$, $\mathrm{Im} f_s$.
   - Esiste una applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Im}L = \mathrm{Im}f_s$? In caso affermativo costruire L.
   - Esiste una applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\ker T = \mathrm{Im}f_s$? In caso affermativo costruire T.
   - Determinare la controimmagine mediante f_s del vettore $(-1, 1, 1)$.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:

$$U_1 = \{(x, y, z) \mid 2x + y - z = 0, \quad x - y = 0\}, \ U_2 = \langle(-1, 1, 1)\rangle.$$

1. Determinare $U_1 + U_2$, $U_1 \cap U_2$ e stabilire se la somma di U_1 ed U_2 è diretta.
2. Esiste una applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che abbia U_1 come nucleo ed U_2 come immagine? In caso affermativo costruire L.
3. Esiste una applicazione lineare iniettiva $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che abbia U_2 come immagine? In caso affermativo costruire T.
4. Esiste una applicazione lineare suriettiva $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ che abbia U_1 come nucleo? In caso affermativo costruire f.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare $f(x, y) = (x + 3y, y, x + 3y)$.

- Determinare la matrice associata a f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.
- Determinare $\ker f$ e Imf.
- Determinare $f^{-1}(1, 1, -1)$.

Esercizio 4. Si considerino, al variare del parametro reale k, le seguenti applicazioni lineari:

$$f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$f_k(x, y, z) = (kx + y - z, ky + (k + 1)z, (k - 1)z).$$

1. Scrivere la matrice associata a f_k rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
2. Determinare per quali valori di k l'applicazione f_k è iniettiva.
3. Determinare per quali valori di k il vettore $(1, 0, 0)$ appartiene a $\mathrm{Im}f_k$.
4. Sia $k = 1$. Determinare un sottospazio vettoriale S di $\mathbb{R}^3$ tale che $S \oplus \ker f_1 = \mathbb{R}^3$.

Esercizio 5. Risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Esercizio 6. Risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = -2 \\ -2x_1 + x_2 - 7x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = -7 \end{cases}$$