Qualche esercizio

1) Si dia la matrice rispetto alla base canonica dell'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ che ammetta il sottospazio $V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - 3y + z = 0\}$ come autospazio di autovalore 2 e il vettore (1,3,1) stia nel Ker.

2) Si consideri il sottospazio di $T =< (1, 0, 1,); (2, 1, 1) >$ di $\mathbf{R}^3$.

i) Se ne determini il suo ortogonale $T^\perp$, $\mathbf{R}^3 = T^\perp \oplus T$.

ii) Se ne determini un addendo diretto L, $\mathbf{R}^3 = L \oplus T$.

iii) Si decomponga il vettore $v = (1, 1, 1)$ rispetto a *i*) , $v = v_\perp + v_\parallel$, e rispetto a *ii)* $v = l + t$ ($l \in L$ e $t \in T$). Si trovino i vettori $l, t, v_\parallel, v_\perp$. È $t = v_\parallel$?

3) Si consideri al variare di a nei numeri reali l'insieme di matrici

$$A_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Per ogni valore di a discuterne la diagonalizzabilità.

ii) Esiste un a per cui la matrice A_a sia ortogonalmente diagonalizzabile? Trovare la matrice ortogonale che la diagonalizzi.

4) Si consideri in $\mathbf{R}^3$ il vettore $v = (1, -1, 1)$ ed i sottospazi $U = \{(x, y, z) \mid x + 2y - 2z = 0\}$ e $W = \{(t, 2t, 3t) \mid t \in \mathbf{R}\}$.

a) determinare al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$ un endomorfismo (i.e. dare la sua matrice rispetto alla base canonica) Φ_λ tale che v sia autovettore di autovalore λ e $\Phi_\lambda(U) = W$. È diagonalizzabile?

b) Studiare al variare di λ la dimensione dell'immagine di Φ_λ.

5) Al variare di a, b, c nei reali si dica quando la matrice

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile. Verificare la risposta su $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

6) In $\mathbf{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale si dia il vettore $w = (1, 1, 2, 1)$ e si consideri il sottospazio vettoriale T

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Determinare il valore minimo di $\|w - t\|$ al variare di $t \in T$, determinare t che raggiunga tale valore.