FOGLIO DI ESERCIZI NUMERO 1

Corso di Matematica II - Ingegneria Meccanica

1. Considerati in $\mathbf{R}^4$ i sottoinsiemi $S = \{(x, y, z, w) \mid x+z = 0, 3y-w = 0\}$ e $T = \{(x, y, z, w) \mid x+z = 0, y+2w = 0\}$, verificare che S e T sono sottospazi di $\mathbf{R}^4$ e determinare $S \cap T$ e $S + T$.

2. Sia V lo spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ costituito dalle funzioni di $[-1, 1]$ in $\mathbf{R}$ dove, per ogni $x \in [-1, 1]$, per ogni $f, g \in V$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi di V:

- $U = \{f \in V \mid f(0) = 0\}$;
- $W = \{f \in V \mid f(-1) = -1\}$;
- $R = \{f \in V \mid f(x) = 0 \text{ se } x < 0\}$;
- $S = \{f \in V \mid f(x) \leq f(y) \text{ se } x \leq y\}$;
- $T = \{f \in V \mid f(-x) = f(x)\ \forall x \in [-1, 1]\}$.

3. Verificare che il sottoinsieme $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 \mid x+3y = 0, z+w = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$; verificare inoltre se la somma del sottospazio S e del sottospazio T generato dai vettori $(1, 0, 1, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$ è diretta ed uguale a $\mathbf{R}^4$.

4. Verificare che il sottoinsieme $W = \{(x, y, z) \mid 2x + y - z = 0\}$ dello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ è un sottospazio. Determinare la dimensione ed una base di W; determinare inoltre un sottospazio W' di $\mathbf{R}^3$ tale che $W \cap W' = \{(0, 0, 0)\}$ e $W + W' = \mathbf{R}^3$.

5. Determinare i valori di k per cui i tre vettori $(1, 2, 0)$, $(2, -1, k)$, $(1, k, -2)$ formano una base di $\mathbf{R}^3$.

6. Determinare una base del sottospazio di $\mathbf{R}^3$ $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y = z, 2x = y\}$. Estendere una base di S per ottenere una base di $\mathbf{R}^3$.

7. Sia f l'endomorfismo di $\mathbf{R}^4$ definito nel modo seguente:

$$f(x, y, z, w) = (w, x + y, x + z, w).$$

Determinare un sottospazio T di $\mathbf{R}^4$ tale che $\mathbf{R}^4 = T \oplus Kerf$.

8. Sia $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita ponendo, per ogni $(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4$, $f(x, y, z, w) = (x + z, 3z - w, y)$; verificare che f è lineare e determinare $Kerf$, Imf e le loro dimensioni.

9. Esiste una applicazione lineare $\varphi : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ tale che $\varphi(0, 1) = (2, 4)$, $\varphi(1, 1) = (1, 5)$? È unica? In caso di risposta affermativa determinare nucleo e immagine di φ.

10. Verificare che l'applicazione $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ tale che

$$f(x, y, z, w) = (x + w, w - z, 2x + 2z)$$

è lineare. Determinare $Kerf$, Imf ed una base per ciascuno di tali sottospazi. Sia poi S il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $v_1 = (0, 1, -2)$ e $v_2 = (1, 0, 2)$; determinare $f^{-1}(S)$.

11. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 11 & -4 \\ 15 & 14 & -5 \end{pmatrix}.$$

Determinare il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ associata, rispetto alle basi canoniche, alla matrice A. Determinare inoltre $f^{-1}(1, 1)$.

12. Siano V e V' due spazi vettoriali reali, di dimensione rispettivamente due e tre, e siano $B = \{v_1, v_2\}$ una base di V e $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base di V'. Sia poi $f : V \longrightarrow V'$ l'applicazione lineare tale che $f(v_1) = u_1 - 2u_2 + u_3$, $f(v_2) = u_3 - 2u_1$. Determinare la matrice A associata ad f rispetto alle basi B e B' e determinare le componenti rispetto a B' del vettore $f(v)$ dove $v = -\frac{1}{2}v_1 + v_2$.

13. Sia f l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ associato, rispetto alla base canonica, alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

con $\alpha \in \mathbf{R}$. Determinare $Kerf$, Imf e le loro dimensioni, esplicitando una base per tali sottospazi, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$.

14. Determinare per quali valori del parametro reale k il seguente sistema ammette infinite soluzioni:

$$\begin{cases} x - ky + z = 1 \\ x + ky - z = 0 \\ 3x - y + z = 2 \end{cases}.$$

[Soluzione: $k = 1$.]

15. Discutere, al variare di $k \in \mathbf{R}$, la risolubilità del sistema:

$$\begin{cases} z + ky = 2 \\ x + y = -1 \\ x + z = 0 \end{cases}.$$

[Soluzione: se $k \neq -1$ una sola soluzione: $(-\frac{k+2}{k+1}, \frac{1}{k+1}, \frac{k+2}{k+1})$; $k = -1$ nessuna soluzione.]

16. Discutere, al variare di $k \in \mathbf{R}$, la risolubilità del sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x + (k-2)y + z = 0 \\ -kx + y - z = 0 \\ x - y + kz = 0 \end{cases}.$$

[Soluzione: se $k \neq 0$ e $k \neq 1$ soluzione nulla; se $k = 0$ l'insieme delle soluzioni è: $< (1,1,1) >$; se $k = 1$ l'insieme delle soluzioni è: $< (1,1,0), (0,1,1) >$.]

17. Risolvere, se possibile, il sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - y + 2z = 2 \\ 2x - 2y + 4z = 4 \end{cases}.$$

[Soluzione: $\langle(-1,5,3)\rangle + (\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, 0)$.]