FOGLIO DI ESERCIZI NUMERO 2
CORSO DI MATEMATICA II - INGEGNERIA MECCANICA

1. Discutere la risolubilità dei seguenti sistemi lineari al variare del parametro:

$$(i) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ hx - hy + z = 0 \\ h^2x + h^2y + z = 0. \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ x - 2y - z = k - 2 \\ x + ky + z = k + 2. \end{cases}$$

$$(iii) \begin{cases} x + hz = -h \\ -x + y + z = h \\ x + hy + hz = 1. \end{cases}$$

Soluzioni: (i) Per $h = \pm 1$ il sistema non ha soluzioni; per $h = 0$ l'insieme delle soluzioni è $S = \langle (-1, 1, 0) \rangle + (1, 0, 0)$; per $h \neq \pm 1, 0$ il sistema ha l'unica soluzione $(-\frac{1}{2(h-1)}, \frac{1}{2(h+1)}, \frac{h^2}{h^2-1})$. (ii) Se $k = 0$ l'insieme delle soluzioni è $T = \langle (1, 1, -1) \rangle + (2, 2, 0)$; se $k \neq 0$ il sistema ha l'unica soluzione $(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}k, \frac{1}{2}, \frac{6-k}{4})$. (iii) Se $h = 0$ il sistema non ha soluzioni; se $h = -1$ l'insieme delle soluzioni è $R = \langle (1, 0, 1) \rangle + (1, 0, 0)$; se $h \neq 0, -1$ il sistema ha l'unica soluzione $(1 - h, \frac{1+h}{h}, -\frac{1}{h})$.

2. Si considerino gli spazi vettoriali $\mathbf{R}^3$ e $\mathbf{R}^4$. Siano dati i vettori $u_1 = (1, 3, 2)$, $u_2 = (-1, 1, 1)$, $u_3 = (1, 0, 2)$ e i vettori $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (-1, 1, 0, 2)$, $v_3 = (1, 2, 1, 0)$, $v_4 = (2, 0, 1, 2)$.

i) Esiste una applicazione lineare $L : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$ tale che $L(u_1) = v_1 - v_3$, $L(u_2) = v_2 + v_4$ e $L(u_3) = v_2 - v_4$? È unica? In caso affermativo determinare $L(1, 0, 0)$.

ii) Esiste una applicazione lineare $\ell : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$ tale che $\ell(u_1) = v_1 - v_3$, $\ell(u_2) = v_2 + v_4$ e $\ker(\ell) = \langle (0, 4, 3) \rangle$?

3. Sia $T : \mathbf{R}^{\leq 3}[x] \rightarrow \mathbf{R}^{\leq 3}[x]$ l'applicazione definita da:

$$T(p(x)) = xp'(x)$$

($p'(x)$ è la derivata prima del polinomio $p(x)$).

- (a) Mostrare che T è lineare.
- (b) Determinare nucleo e immagine di T .
- (c) Scrivere la matrice associata a T rispetto alla base $\{1, x, x^2, x^3\}$ di $\mathbf{R}^{\leq 3}[x]$.
- (d) Determinare i polinomi p tali che $T(p) = p$.

4. Sia f l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ associato, rispetto alla base canonica, alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

- a) Determinare Imf , $ker f$ ed una base per ciascuno di tali sottospazi.
- b) Il vettore $w = (1, -4, -5)$ è un vettore di Imf ? In caso affermativo determinarne la controimmagine.

5. Sia f l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ associato, rispetto alla base canonica, alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $\alpha \in \mathbf{R}$. Determinare $ker f$, Imf e le loro dimensioni, esplicitando una base per tali sottospazi, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$.

6. Sia $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ la trasformazione lineare così definita:

$$f((a, b, c)) = (3a + c, -2a + b, -a + 2b + 4c).$$

Si richiede di:

- i) dimostrare che f è un isomorfismo;
- ii) determinare la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica;
- iii) dimostrare che i vettori $u = (1, 0, 1)$, $v = (-1, 0, 1)$, $w = (0, 2, 0)$ sono una base di $\mathbf{R}^3$ e determinare la matrice $\tilde{A}$ associata ad f rispetto a tale base.

7. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e sia $V = V_1 \oplus V_2$. Sia

$$p_{V_1}^{V_2} : V \longrightarrow V$$

l'applicazione che ad ogni vettore v di V associa la sua componente lungo V_1 : se $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$, $p_{V_1}^{V_2}(v) = v_1$.

i) Mostrare che $p_{V_1}^{V_2}$ è un'applicazione lineare.

ii) Sia $V = \mathbf{R}^3$ e sia $V_1 = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle$. Determinare due sottospazi distinti V_2, V_3 di $\mathbf{R}^3$ tali che $\mathbf{R}^3 = V_1 \oplus V_2$ e $\mathbf{R}^3 = V_1 \oplus V_3$. Calcolare $p_{V_1}^{V_2}(1, 0, 2)$ e $p_{V_1}^{V_3}(1, 0, 2)$. I vettori trovati coincidono?