

CORSO DI MATEMATICA II - INGEGNERIA MECCANICA

Esercizi 3 novembre 2003

Esercizio 1. Calcolare gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Stabilire se essa è diagonalizzabile su $\mathbf{R}$ ed in caso affermativo scrivere la forma diagonale di A ed una matrice diagonalizzante.

Esercizio 2. Stabilire se le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

sono simili.

Esercizio 3. Nello spazio $\mathbf{R}^3$ munito del prodotto scalare canonico determinare la proiezione ortogonale del vettore $v = (1, 3, 2)$ sul sottospazio $V = \langle (-1, 2, 2), (0, -1, 1) \rangle$.

Esercizio 4. Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ definita da:

$$T(a, b, c) = (0, a + 3b - 2c, 2a + 6b - 4c).$$

- i) Calcolare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica.
- ii) Determinare gli autovalori di A e dire se A è diagonalizzabile; in caso affermativo trovare una matrice diagonalizzante A .

Esercizio 5. Calcolare, se esistono, valori del parametro reale t per i quali la seguente matrice A_t ammette due autovalori negativi ed uno positivo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & t-1 \\ 0 & t-1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6. Stabilire se l'applicazione $A : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ definita dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 12 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è invertibile ed in caso affermativo determinarne l'inversa.

Esercizio 7. Si considerino lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^{\leq 3}[x]$ dei polinomi di grado minore o uguale a 3 e l'operatore di derivazione $D : \mathbf{R}^{\leq 3}[x] \rightarrow \mathbf{R}^{\leq 3}[x]$ che associa ad ogni polinomio la sua derivata prima. Determinare gli autovalori di D e calcolarne i relativi autospazi. Decidere se D è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovarne la forma diagonale.

Esercizio 8. Si consideri la proiezione ortogonale

$$p_W : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$$

sul sottospazio W di $\mathbf{R}^3$: $W = \langle (1, 0, 1), (1, 1, 2) \rangle$.

- 1) Determinare la matrice associata a p_W rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.
- 2) Determinare $\text{Im } p_W$.
- 3) Determinare $p_W(1, 1, 1)$.

Esercizio 9. Si consideri la base $\{(-1/2, 0, 1), (-1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ di $\mathbf{R}^3$. Determinare la base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ associata alla base data dal procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.

Esercizio 10. Determinare equazioni cartesiane del sottospazio $W^\perp$ sapendo che $W = \langle (-1, 3, 1/2, -2), (1, 0, 2, 4) \rangle$. Determinare una base di $W^\perp$.

Esercizio 11. Determinare il sottospazio vettoriale $(\ker A)^\perp$ di $\mathbf{R}^4$ essendo A la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 12. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ munito del prodotto scalare canonico e sia $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ la trasformazione lineare, dipendente dal parametro t , definita da:

$$T(x, y, z) = (x + ty + z, y + (t + 1)z, (t - 1)x + y).$$

Determinare, al variare del parametro t , una base del sottospazio ortogonale ad $\text{Im } T$.

DOMANDE FILTRO

- 1) Sia A una matrice diagonale. Quali sono i suoi autovalori?
- 2) Sia A una matrice triangolare. Quali sono i suoi autovalori?
- 3) Una matrice simile ad una matrice diagonalizzabile è diagonalizzabile?
- 4) Una matrice invertibile è diagonalizzabile?
- 5) Supponiamo che la matrice A di ordine n ammetta l'autovalore $\lambda = 0$. Qual è l'autospazio corrispondente?
- 6) Dimostrare, senza far uso del polinomio caratteristico, che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ammette l'autovalore $\lambda = 0$.

- 7) Sia A una matrice per la quale il vettore v è un autovettore di autovalore λ . E' vero che v è anche autovettore di A^2 ? Rispetto a quale autovalore?
- 8) Quali fra le seguenti matrici sono ortogonali?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

- 9) Sia A una matrice ortogonale. Dimostrare che $\det(A) = \pm 1$.
- 10) Determinare una base del sottospazio di $\mathbf{R}^4$ ortogonale al sottospazio $\langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0) \rangle$.