I prova parziale Matematica 2, 10/02/06
Ingegneria Ambiente e Territorio
Soluzione degli esercizi, Tema n.1

Esercizio 1

a) L'insieme T consiste delle matrici di $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ della forma:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_1 & x_3 \\ x_4 & x_1 - x_3 & 2x_1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto T è l'insieme di tutte e sole le combinazioni lineari delle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e, come tale, è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$.

b) Le matrici B e C sono linearmente indipendenti poiché non sono una multiplo dell'altra e la matrice A non può essere una combinazione lineare delle matrici B e C dal momento che gli elementi di posto 1, 1 di B e C sono nulli e l'elemento di posto 1, 1 della matrice A è non nullo. Dunque le matrici A , B e C generano T e sono linearmente indipendenti, pertanto individuano una base di T . Di conseguenza: $\dim(T) = 3$.

c) L'insieme L è contenuto in T poiché i generatori di L soddisfano le equazioni di T . Si osservi che il terzo generatore di L è somma dei primi due e che questi sono linearmente indipendenti. Dunque $\dim(L) = 2$. Usando la formula di Grassmann otteniamo $\dim(S) = 1$. Si tratta dunque di completare la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ di L in una base di T . Si può scegliere, ad esempio:

$$S = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Esercizio 2 Consideriamo la matrice completa $(A|b)$ associata al sistema dato: $(A|b) =$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a^2 + 2a + 3 & a^2 - 2 & a + 6 \\ 0 & 1 & 2(a^2 + 2a + 1) & 3a^2 - 2a - 7 & 3a + 4 \end{array} \right) \text{ e riduciamola in forma a scalini:}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & a^2 + 2a + 4 & a^2 - 2 & a + 5 \\ 0 & 1 & 2(a^2 + 2a + 1) & 3a^2 - 2a - 7 & 3a + 4 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a^2 + 2a & a^2 - 4 & a + 1 \\ 0 & 0 & 2(a^2 + 2a) & 3a^2 - 2a - 8 & 3a + 2 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a^2 + 2a & a^2 - 4 & a + 1 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 - 2a & a \end{array} \right).$$

Se $a^2 - 2a \neq 0$ e $a^2 + 2a \neq 0$ cioè, per ogni $a \neq 0, 2, -2$, $rg(A) = rg(A|b) = 4$, dunque il sistema ammette una ed una sola soluzione;

se $a = 2$ oppure $a = -2$, $rg(A) = 3 \neq rg(A|b) = 4$, dunque il sistema non ha soluzioni;

infine, se $a = 0$, $rg(A) = rg(A|b) = 3$, dunque il sistema ha infinite soluzioni che si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ y + 2z + t = 2 \\ -4t = 1 \end{cases}$$

Si ottiene l'insieme di soluzioni: $(-\frac{5}{8}, \frac{9}{4}, 0, -\frac{1}{4}) + \langle (\frac{3}{2}, -2, 1, 0) \rangle$.

Esercizio 3

a) Riducendo la matrice A in forma a scala si ottiene $rg(A) = 3$. Dunque l'immagine di g ha dimensione 3, vale a dire: $Im\ g = \mathbb{R}^3$. Per il teorema delle dimensioni, $\ker\ g = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

b) Dal momento che l'endomorfismo g è biunivoco, la controimmagine del vettore $(2, 1, 3)$ è costituita da un solo elemento che si trova risolvendo il sistema lineare associato alla matrice:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right).$$

Riducendo a scala si ottiene l'unica soluzione: $(\frac{8}{11}, \frac{9}{11}, \frac{2}{11})$.

c) Si ha $g(L) = \langle (0, 1, 2), (2, -3, 4) \rangle$. Per quanto trovato in a), basta scegliere $M = \langle (2, 1, 1) \rangle$.

d) I vettori $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$ e $(1, 0, 1)$ sono linearmente indipendenti. Per ipotesi, $\dim(Im\ \psi) = 2$ e $\dim(\ker\ \psi) = 1$. Pertanto le condizioni assegnate sono compatibili con il teorema delle dimensioni e, di conseguenza, una applicazione lineare ψ come richiesta esiste.

Fissata la base $\{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$ nel dominio di ψ e la base canonica nel codominio, la matrice di ψ rispetto a queste basi è:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4

$$a) \dim(V) = rg \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= rg \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 15 \end{pmatrix} = 3; \text{ inoltre } W = \langle (1, 0, 1, 0, 1), (0, 1, -1, 1, -1) \rangle, \text{ dal mo-}$$

mento che $(2, 1, 1, 1, 1) = 2(1, 0, 1, 0, 1) + (0, 1, -1, 1, -1)$. Dunque $\dim(W) = 2$.

b) Si ha:

$$\begin{aligned} \dim(V + W) &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 15 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 15 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \\ &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = 4. \end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto:

$$V + W = \langle (1, 3, 5, 2, 1), (0, 1, -1, 1, 5), (0, 0, -7, 1, 15), (0, 0, 0, 0, 1) \rangle.$$

Usando la formula di Grassmann si ha: $\dim(V \cap W) = 1$. Osserviamo che $(1, 0, 1, 0, 1) = (2, 3, 6, 2, 2) - (1, 3, 5, 2, 1)$, pertanto $V \cap W = \langle (1, 0, 1, 0, 1) \rangle$.

c) Si tratta di completare una base di V in una base di $V + W$. Usando la descrizione di $V + W$ ottenuta in b), si osserva immediatamente che si può scegliere, ad esempio, $S = \langle (0, 0, 0, 0, 1) \rangle$.

d) Il vettore $(1, 4, 4, 3, 6)$ è uno dei generatori di partenza del sottospazio V . Si ha: $m = (1, 4, 4, 3, 0) = (1, 4, 4, 3, 6) - 6(0, 0, 0, 0, 1)$. Dunque: $m_V = (1, 4, 4, 3, 6)$ e $m_S = (0, 0, 0, 0, -6)$.

Esercizio 5 La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, è iniettiva ma non suriettiva. Naturalmente essa non soddisfa il teorema delle dimensioni non essendo una funzione lineare. (Un'applicazione lineare $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ iniettiva è anche suriettiva).