

SMCSolver: un pacchetto per la risoluzione di catene di Markov strutturate

D.A. Bini, B. Meini, S. Steffé, B. Van Houdt

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Italy
Department of Mathematics and Computer Science, University of Antwerp,
Antwerpen, Belgium

Motivazioni e scopi

- Ampie classi di problemi di ingegneria delle telecomunicazioni vengono descritti da modelli di code che richiedono la risoluzione di catene di Markov strutturate di dimensione infinita
- Diversi algoritmi di grande efficienza computazionale ma di elevata complessità logica sono stati progettati e analizzati nell'ultimo decennio
- Esigenza di disporre di implementazioni degli algoritmi più avanzati di facile uso e di alta efficienza utilizzabili
 - ✦ dai non esperti interessati alle applicazioni
 - ✦ dai ricercatori come strumento sperimentale per lo studio di algoritmi
- Libreria Fortran 95, interfaccia grafica user-friendly, <http://bezout.dm.unipi.it/SMCSolver>
- Toolbox Matlab <http://www.win.ua.ac.be/~vanhoudt/>

Motivazioni e scopi

- Ampie classi di problemi di ingegneria delle telecomunicazioni vengono descritti da modelli di code che richiedono la risoluzione di catene di Markov strutturate di dimensione infinita
- Diversi algoritmi di grande efficienza computazionale ma di elevata complessità logica sono stati progettati e analizzati nell'ultimo decennio
- Esigenza di disporre di implementazioni degli algoritmi più avanzati di facile uso e di alta efficienza utilizzabili
 - dai non esperti interessati alle applicazioni
 - dai ricercatori come strumento sperimentale per lo studio di algoritmi
- Libreria Fortran 95, interfaccia grafica user-friendly, <http://bezout.dm.unipi.it/SMCSolver>
- Toolbox Matlab <http://www.win.ua.ac.be/~vanhoudt/>

Motivazioni e scopi

- Ampie classi di problemi di ingegneria delle telecomunicazioni vengono descritti da modelli di code che richiedono la risoluzione di catene di Markov strutturate di dimensione infinita
- Diversi algoritmi di grande efficienza computazionale ma di elevata complessità logica sono stati progettati e analizzati nell'ultimo decennio
- Esigenza di disporre di implementazioni degli algoritmi più avanzati di facile uso e di alta efficienza utilizzabili
 - dai non esperti interessati alle applicazioni
 - dai ricercatori come strumento sperimentale per lo studio di algoritmi
- Libreria Fortran 95, interfaccia grafica user-friendly, <http://bezout.dm.unipi.it/SMCSolver>
- Toolbox Matlab <http://www.win.ua.ac.be/~vanhoudt/>

Motivazioni e scopi

- Ampie classi di problemi di ingegneria delle telecomunicazioni vengono descritti da modelli di code che richiedono la risoluzione di catene di Markov strutturate di dimensione infinita
- Diversi algoritmi di grande efficienza computazionale ma di elevata complessità logica sono stati progettati e analizzati nell'ultimo decennio
- Esigenza di disporre di implementazioni degli algoritmi più avanzati di facile uso e di alta efficienza utilizzabili
 - dai non esperti interessati alle applicazioni
 - dai ricercatori come strumento sperimentale per lo studio di algoritmi
- Libreria Fortran 95, interfaccia grafica user-friendly, <http://bezout.dm.unipi.it/SMCSolver>
- Toolbox Matlab <http://www.win.ua.ac.be/~vanhoudt/>

Motivazioni e scopi

- Ampie classi di problemi di ingegneria delle telecomunicazioni vengono descritti da modelli di code che richiedono la risoluzione di catene di Markov strutturate di dimensione infinita
- Diversi algoritmi di grande efficienza computazionale ma di elevata complessità logica sono stati progettati e analizzati nell'ultimo decennio
- Esigenza di disporre di implementazioni degli algoritmi più avanzati di facile uso e di alta efficienza utilizzabili
 - dai non esperti interessati alle applicazioni
 - dai ricercatori come strumento sperimentale per lo studio di algoritmi
- Libreria Fortran 95, interfaccia grafica user-friendly, <http://bezout.dm.unipi.it/SMCSolver>
- Toolbox Matlab <http://www.win.ua.ac.be/~vanhoudt/>

Motivazioni e scopi

- Ampie classi di problemi di ingegneria delle telecomunicazioni vengono descritti da modelli di code che richiedono la risoluzione di catene di Markov strutturate di dimensione infinita
- Diversi algoritmi di grande efficienza computazionale ma di elevata complessità logica sono stati progettati e analizzati nell'ultimo decennio
- Esigenza di disporre di implementazioni degli algoritmi più avanzati di facile uso e di alta efficienza utilizzabili
 - dai non esperti interessati alle applicazioni
 - dai ricercatori come strumento sperimentale per lo studio di algoritmi
- Libreria Fortran 95, interfaccia grafica user-friendly, <http://bezout.dm.unipi.it/SMCSolver>
- Toolbox Matlab <http://www.win.ua.ac.be/~vanhoudt/>

Motivazioni e scopi

- Ampie classi di problemi di ingegneria delle telecomunicazioni vengono descritti da modelli di code che richiedono la risoluzione di catene di Markov strutturate di dimensione infinita
- Diversi algoritmi di grande efficienza computazionale ma di elevata complessità logica sono stati progettati e analizzati nell'ultimo decennio
- Esigenza di disporre di implementazioni degli algoritmi più avanzati di facile uso e di alta efficienza utilizzabili
 - dai non esperti interessati alle applicazioni
 - dai ricercatori come strumento sperimentale per lo studio di algoritmi
- Libreria Fortran 95, interfaccia grafica user-friendly, <http://bezout.dm.unipi.it/SMCSolver>
- Toolbox Matlab <http://www.win.ua.ac.be/~vanhoudt/>

Quasi-Birth-Death (QBD) problems

$$P = \begin{bmatrix} B_0 & B_1 & & & 0 \\ B_{-1} & A_0 & A_1 & & \\ & A_{-1} & A_0 & A_1 & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

$A_{-1}, A_0, A_1 \geq 0$, $m \times m$, $A_{-1} + A_0 + A_1$ stocastica per righe
 $B_{-1}, B_0 \geq 0$, $m \times n$, P stocastica per righe

Scopi:

- Calcolare le soluzioni minime non negative G , R , U di

$$G = A_{-1} + A_0 G + A_1 G^2,$$

$$R = A_1 + R A_0 + R^2 A_{-1},$$

$$U = A_0 + A_1 (I - U)^{-1} A_{-1}.$$

- calcolare k componenti di π tali che $\pi P = \pi$.
- calcolare il drift e controllare la positiva/nulla ricorrenza e transienza della catena di Markov.

M/G/1-type Markov chains

$$P = \begin{bmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & \dots \\ B_{-1} & A_0 & A_1 & A_2 & \dots \\ & A_{-1} & A_0 & A_1 & \ddots \\ & & A_{-1} & A_0 & \ddots \\ 0 & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

A_i, B_i nonnegative $m \times m$, $\sum_{i=-1}^{+\infty} A_i, \sum_{i=0}^{+\infty} B_i$ stocastiche.

Goals:

- calcolare la soluzione minima nonnegativa G di

$$G = \sum_{i=-1}^{+\infty} A_i G^{i+1}$$

- calcolare il vettore π tale che $\pi P = \pi$
- calcolare il drift

G/M/1-type Markov chains

$$P = \begin{bmatrix} B_0 & B_1 & & & 0 \\ B_{-1} & A_0 & A_1 & & \\ B_{-2} & A_{-1} & A_0 & A_1 & \\ B_{-3} & A_{-2} & A_{-1} & A_0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

$A_{-i}, B_{-i} \geq 0$, $m \times m$, $\sum_{i=-1}^{n-1} A_{-i} + B_{-n}$ stocastica

Goals

- calcolare la soluzione minima non negativa R di

$$R = \sum_{i=-1}^{+\infty} R^{i+1} A_{-i}$$

- calcolare il vettore π
- calcolare il drift

Non-skip-free processes

$$P = \begin{bmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & \dots \\ B_{-1} & A_0 & A_1 & A_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ B_{-N+1} & A_{-N+2} & A_{-N+3} & A_{-N+4} & \ddots \\ A_{-N} & A_{-N+1} & A_{-N+2} & A_{-N+3} & \ddots \\ & A_{-N} & A_{-N+1} & A_{-N+2} & \ddots \\ & & A_{-N} & A_{-N+1} & \ddots \\ & & & A_{-N} & \ddots \\ 0 & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Goals:

- calcolare π
- calcolare G della M/G/1 "ribloccata"

Gli algoritmi e le tecniche

- Iterazioni funzionali
- Riduzione logaritmica e Riduzione ciclica per QBD
- Riduzione ciclica per catene di Markov di tipo M/G/1
- Metodo dei sottospazi invarianti
- Riduzioni
 - Riduzione di Ramaswami: da M/G/1 a QBD
 - Da G/M/1 to M/G/1
 - Da Non-Skip-Free a M/G/1
- Tecnica di shift
- Point-wise computations (evaluation/interpolation)

D. Bini, G. Latouche, B. Meini, *Numerical Solution of Structured Markov Chains*, Oxford University Press, 2005.