Problemi agli autovalori per matrici con struttura di rango totalmente positive

L. Gemignani

Università di Pisa

gemignan@dm.unipi.it

http://www.dm.unipi.it/˜gemignan

La Motivazione

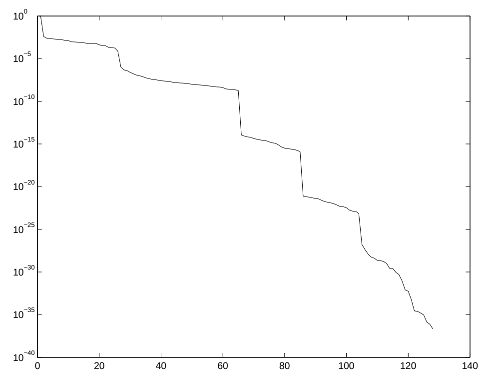
Strutture di Rango

» a=imread('show_img.php.tif');

» b=ind2gray(a, gray);

» b=single(b); l=svd(b(1:150, 150:300));

» semilogy(l/max(l))



- $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ha una "**struttura di rango**" ($A \in \mathcal{F}(p,q)$) se:

$$\max_{1\le k\le n-1} \text{rank}\, A(k+1\colon n, 1\colon k) \le p, \quad p << n$$

$$\max_{1\le k\le n-1} \text{rank}\, A(1\colon k, k+1\colon n) \le q, \quad q << n$$

Stato dell'Arte

- "Fast approximate direct solvers" per matrici **sparse** e/o **strutturate** [Hackbusch, Rocklin, Chandrasekaran & Gu, Eidelman & Gohberg, Tyrtyshnikov, Van Barel]
  1. algebra lineare per equazioni integrali;
  2. risolutori diretti approssimati per matrici con struttura di dislocamento;
- "Fast eigenvalue solvers" per **correzioni di rango basso di matrici hermitiane e/o unitarie con struttura di rango** [Chandrasekaran & Gu, Eidelman & Gohberg & Olshevsky, Van Barel]
  1. matrici (a blocchi) "companion-like"
  2. rappresentazione ($\Rightarrow$ **generatori**) e stabilitá

Ragionando sugli Errori

- Approccio tradizionale:
  1. Matrice rappresentata mediante i suoi elementi
  2. Stabilità all'indietro (errore assoluto !!!!) del metodo QR [Tisseur, 1996]
  3. Precisione (errore relativo!!!!) elevata per matrici tridiagonali definite positive
     (a) Metodo LR $\Rightarrow$ "The new QD algorithm" [Parlett, 1995]
     (b) Metodo QR con "zero-shift" [Demmel & Kahan, 1990]
- Approccio strutturato:
  1. Scelta dei generatori
  2. Evidenze sperimentali per la stabilità all'indietro nel metodo QR strutturato per scelte "ragionevoli" dei generatori
  3. Errore relativo ?????

Il Caso Tridiagonale

1. $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tridiagonale irriducibile definita positiva
2. Con opportuna scalatura $T \to \widehat{T}$

$$\widehat{T} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & l_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 & 1 & & \\ & u_2 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & u_n \end{bmatrix}, \quad u_i, l_i > 0$$

3. Metodo LR (con shift) applicato a $\widehat{T} = \widehat{T}_0$:
   $\widehat{T}_k - \sigma_k I = \widehat{L}_k \widehat{U}_k;\ \widehat{T}_{k+1} = \widehat{U}_k \widehat{L}_k + \sigma_k I;\ \widehat{T}_{k+1} = LR(\widehat{T}_k, \sigma_k)$
4. $\widehat{L}_k, \widehat{U}_k$ conservano la struttura; se $\widehat{T}_{k+1} = LR(\widehat{T}_k, 0)$
   allora $\widehat{L}_k \to \widehat{L}_{k+1}$ e $\widehat{U}_k \to \widehat{U}_{k+1}$ senza sottrazioni

Come Generalizzare?

- $\widehat{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **totalmente non negativa** == tutti i minori sono non negativi
- $\widehat{T}$ rappresentata in forma LU
- fattorizzazione LU $\leftrightarrow$ metodo di eliminazione. Quale eliminazione?
  1. Eliminazione gaussiana [de Boor & Pinkus]
  2. Eliminazione di Neville [Gasca & Péna]

```
untitled5                                                Page 1
February 21, 2007                                   10:33:18 AM
>> u=rand(1,5); v=rand(1,5); d=rand(1,5);
for i=1:5; for j=1:i; a(i,j)=u(i)*v(j); end; end;
for i=1:5; for j=1:i; a(j,i)=a(i,j); end; end;
for i=1:5; a(i,i)=a(i,i)+ d(i); end; a

a =

   0.5950   0.1628   0.3568   0.2157   0.3043
   0.1628   0.6573   0.2534   0.1532   0.2161
   0.3568   0.2534   0.3086   0.0954   0.1346
   0.2157   0.1532   0.0954   0.7952   0.1372
   0.3043   0.2161   0.1346   0.1372   0.8624

>> an=a; for k=1:4; an(k+1, :)=a(k+1,:)−(a(k+1,1)/a(k,1))*a(k,:); end; an

an =

   0.5950   0.1628   0.3568   0.2157   0.3043
        0   0.6127   0.1558   0.0942   0.1329
        0  −1.1873  −0.2468  −0.2404  −0.3392
        0   0.0000  −0.0912   0.7375   0.0559
        0        0        0  −0.9847   0.6688

>> ag=a; for k=1:4; ag(k+1, :)=a(k+1,:)−(a(k+1,1)/a(1,1))*a(1,:); end; ag

ag =

   0.5950   0.1628   0.3568   0.2157   0.3043
        0   0.6127   0.1558   0.0942   0.1329
        0   0.1558   0.0947  −0.0339  −0.0479
        0   0.0942  −0.0339   0.7170   0.0269
        0   0.1329  −0.0479   0.0269   0.7068
```

Neville Elimination

$$A = A^{(1)} \longrightarrow A^{(2)} \longrightarrow \ldots \longrightarrow A^{(n-1)} = U,\ F_{n-1} \cdots F_2 \cdot F_1 A = U$$

$$\widetilde{a}_{i,j}^{(k+1)} = a_{i,j}^{(k)} - m_{i,k} a_{i-1,j}^{(k)} \ \text{ if } i > k$$

$$F_j = I_{j-1} \oplus \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -m_{j+1,j} & \ddots & & \\ & \ddots & 1 & \\ & & -m_{n,j} & 1 \end{bmatrix}, \mathcal{F}_j(\alpha) = I_{j-1} \oplus \begin{bmatrix} 1 & \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix} \oplus I_{n-j-1}$$

$$\mathcal{F}_j(\alpha) \cdot \mathcal{F}_k(\beta) = \mathcal{F}_k(\beta) \cdot \mathcal{F}_j(\alpha) \quad \text{if } |j-k| \geq 2$$

Per Matrici con Struttura di Rango

Th: Se $A \in \mathcal{F}_{p,q}$ totalmente positiva **allora** $A^{(p+1)} \in \mathcal{F}_{p,q}$ e $a_{i,j}^{(p+1)} = 0$ per $i - j > p$.

Pr: Con “tecniche di scambio”

$$F_p \cdots F_2 \cdot F_1 A^{(1)} = A^{(p+1)}, \quad \widehat{F}_p \cdot \widehat{L}_p \cdot A^{(1)} = A^{(p+1)}$$

$$\widehat{L}_p = ((\mathcal{F}_{j+p}(m_{j+p+1,p}) \cdots \mathcal{F}_{n-1}(m_{n,p})) \cdots (\mathcal{F}_{j+1}(m_{j+2,1}) \cdots \mathcal{F}_{n-1}(m_{n,1})))$$

$$B = \widehat{L}_p \cdot A^{(1)}, \; B[j+1:n, 1:j] = \begin{bmatrix} x & \dots & \dots & x & \dots & x \\ & x & \dots & \vdots & \dots & x \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & x & \dots & x \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & x & \dots & x \end{bmatrix}$$

La Fattorizzazione

Th: $A \in \mathcal{F}_{p,q}$ totalmente positiva $\Longleftrightarrow$

$$A = F_1' \cdots F_{n-p-1}' \cdot L^{(n-p)} \ldots L^{(n-1)} \cdot D \cdot U^{(n-1)} \ldots U^{(n-q)} \cdot G_{n-q-1}' \cdots$$

1. $L^{(k)} = (l_{i,j}^{(k)})$, $F_k' = ({f'_{i,j}}^{(k)})$ bidiag. inferiori, $U^{(k)} = (u_{i,j}^{(k)})$, $G_k' = ({g'_{i,j}}^{(k)})$ bidiag. superiori, $l_{i,i}^{(k)} = {f'_{i,i}}^{(k)} = u_{i,i}^{(k)} = {g'_{i,i}}^{(k)} = 1$
2. D diagonale, $d_i > 0$
3. $l_{i+1,i}^{(k)} = u_{i,i+1}^{(k)} = {f'_{i+1,i}}^{(k)} = {g'_{i+1,i}}^{(k)} = 0$ per $i < n-k$, ${f'_{i+1,i}}^{(k)} = 0$ per $i > \min\{n-k+p-1, n-1\}$ e ${g'_{i+1,i}}^{(k)} = 0$ per $i > \min\{n-k+q-1, n-1\}$;
4. $l_{i+1,i}^{(k)} > 0$, $u_{i,i+1}^{(k)} > 0$ per $i \geq n-k$, ${f'_{i+1,i}}^{(k)} > 0$ per $n-k \leq i \leq \min\{n-k+p-1, n-1\}$ e ${g'_{i+1,i}}^{(k)} > 0$ per $n-k \leq i \leq \min\{n-k+q-1, n-1\}$

La Tridiagonalizzazione

In: $A{=}F_1'\cdots F_{n-p-1}'{\cdot}L^{(n-p)}\cdots L^{(n-1)}{\cdot}D{\cdot}U^{(n-1)}\cdots U^{(n-q)}{\cdot}G_{n-q-1}'\cdots G_1'$
Out: $T{=}\mathcal{L}\mathcal{D}\mathcal{U}$ con T tridiagonale

- Adattare "Bulge chasing technique" [Koev, 2005]

$$A^{(k)} \rightarrow \mathcal{F}_j(\alpha)A^{(k)}(\mathcal{F}_j(\alpha))^{-1} = \mathcal{F}_j(\alpha)A^{(k)}(\mathcal{F}_j(-\alpha))$$

1. 1 moltiplicazione è gratuita;
2. la rimanente si sposta da sinistra a destra o viceversa finchè è assorbita;
3. scambio $\iff L \cdot U = \widehat{U} \cdot \widehat{L}$

Th: $A \rightarrow T$ con $A \in \mathcal{F}_{p,q}$ totalmente positiva in forma fattorizzata al costo di $O(n^2(p^2+q^2))$ flops (addizioni, moltiplicazioni/divisioni)

Calcolo degli autovalori

In: $A \in \mathcal{F}_{p,q}$ totalmente positiva

- Calcolare la fattorizzazione con il metodo di Neville
  1. Costo: $O(n^2 \cdot \max\{p, q\})$ se A specificata dai suoi elementi; $O(n \cdot \max\{p^3, q^3\})$ se A data in forma “compattata” mediante i suoi generatori;
  2. Stabilita‘ all’indietro (classica)
- Tridiagonalizzare la matrice
  1. Costo: $O(n^2(p^2 + q^2))$
  2. Elevata precisione
- Calcolo degli autovalori di T
  1. Costo: $O(n^2)$
  2. Elevata precisione

Conclusioni

1. Gli autovalori di una matrice $A \in \mathcal{F}_{p,q}$ totalmente positiva possono essere calcolati con costo $O(n^2)$.
2. Inoltre se

$$|fl(Fatt(A)) - Fatt(A)|_{i,j} \leq \delta |Fatt(A)|_{i,j}$$

allora l'errore relativo negli autovalori è maggiorato da $\delta \cdot p(n)$ con p polinomio in n.