Applicazione dell'Inverse Scattering Transform alla risoluzione dell'equazione di Schrödinger

S. Seatzu, C. van der Mee, A. Aricò e G. Rodriguez

Dipartimento di Matematica e Informatica Università di Cagliari

Due Giorni di Algebra Lineare Numerica Padova, 26-27 Febbraio 2007



Motivazione

Lo studio di numerosi problemi applicativi comporta la risoluzione di equazioni integrali con nuclei strutturati.

L'interesse attuale del nostro gruppo è focalizzato sui seguenti settori:

- la trasmissione dei segnali tramite fibre ottiche;
- il design ottimale dei cristalli fotonici.

Le ricerche sulla trasmissione mediante fibre ottiche, come quelle sui cristalli fotonici, riguardano equazioni e sistemi di equazioni integrali di Fredholm di II specie con nucleo convolutorio, anticonvolutorio e di Volterra.

Queste motivazioni sono alla base di una delle principali tematiche di ricerca indicate dall'unità di Cagliari nel progetto PRIN 2006.



Trasmissione mediante fibre ottiche

La trasmissione dei segnali mediante fibre ottiche è un settore di grande interesse matematico, dal punto di vista sia modellistico sia numerico:



Trasmissione mediante fibre ottiche

La trasmissione dei segnali mediante fibre ottiche è un settore di grande interesse matematico, dal punto di vista sia modellistico sia numerico:

dal punto di vista modellistico, in quanto si tratta di identificare le situazioni fisicamente più *significative*, quelle nelle quali si generano i solitoni, ossia quei segnali che possono viaggiare nelle fibre ottiche per centinaia di Km senza subire alcuna attenuazione;



Trasmissione mediante fibre ottiche

La trasmissione dei segnali mediante fibre ottiche è un settore di grande interesse matematico, dal punto di vista sia modellistico sia numerico:

- dal punto di vista modellistico, in quanto si tratta di identificare le situazioni fisicamente più *significative*, quelle nelle quali si generano i solitoni, ossia quei segnali che possono viaggiare nelle fibre ottiche per centinaia di Km senza subire alcuna attenuazione;
- dal punto di vista numerico, in quanto i metodi finora utilizzati per la risoluzione delle equazioni integrali che intervengono non sono del tutto appropriati. In particolare non tengono conto, in misura adeguata, dei progressi recentemente ottenuti nello studio dei modelli matematici con nuclei strutturati.



Fibre ottiche e IST

Più precisamente:

- la risoluzione di alcune equazioni nonlineari di evoluzione, in particolare quella di Schrödinger, può essere ottenuta con l'applicazione della Inverse Scattering Transform (IST);
- > la IST, metodologia piuttosto complessa, richiede la risolubilità di
 - un sistema integrale di Volterra;
 - un'equazione integrale con nucleo di convoluzione;
 - un'equazione differenziale (in un semipiano);
 - un sistema integrale con nucleo di tipo anticonvolutorio.



Equazione nonlineare di Schrödinger

Equazione nonlineare di Schrödinger:

$$\begin{cases} \mathbf{i}\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + 2|q|^2 q, & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+, \\ q(x,0) \text{ noto} \end{cases}$$

in cui q = q(x, t) è il potenziale.

Partendo dal potenziale iniziale $q(x, 0) \in L^1(\mathbb{R})$, si cercano soluzioni q(x, t) che siano in $L^1(\mathbb{R})$ per ogni $t \in \mathbb{R}^+$.

Una di queste è

$$q(x,t) = \pm A \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}Bx - \mathrm{i}(A^2 - B^2)t + \mathrm{i}C}}{\cosh(Ax - 2ABt + D)}$$

in cui A, B, C e D sono costanti reali.



Equazione nonlineare di Schrödinger

La risoluzione mediante la IST richiede l'analisi dell'associato problema spettrale (di Zakharov-Shabat):

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} & +\mathbf{i}q(x,0)\\ \mathbf{i}q^*(x,0) & \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \Psi(\lambda,x) = \lambda \Psi(\lambda,x).$$

La soluzione $\Psi(\lambda, x)$ tale che $\Psi(\lambda, x) \sim e^{i\lambda x \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}} (I_2 + o(1))$ per $x \to +\infty$ caratterizza la matrice unitaria (det = 1)

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ * & * \end{bmatrix} = \lim_{x \to -\infty} e^{-i\lambda x \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}} \Psi(\lambda, x)$$

che contiene le quantità fisicamente più significative:

- $T(\lambda) = 1/a(\lambda)$ è il coefficiente di trasmissione
- $R(\lambda) = -b(\lambda)/a(\lambda)$ è il coefficiente di riflessione







Schema proposto da Zakharov-Shabat





Schema proposto da Zakharov-Shabat



Schema proposto da Zakharov-Shabat



Schema proposto da Zakharov-Shabat

Metodo proposto da Van der Mee









1. Equazioni di Volterra (al tempo 0): $q(x,0) \rightarrow B(x,\alpha)$

$$\begin{cases} B_1(x,\alpha) - \int_x^\infty q(y) B_3(y,\alpha) \, \mathrm{d}y &= 0\\ \int_x^{x+\frac{\alpha}{2}} q^*(y) B_1(y,\alpha - 2(y-x)) \, \mathrm{d}y + B_3(x,\alpha) = -\frac{1}{2} q^* \left(x + \frac{\alpha}{2}\right) \end{cases}$$





- 1. Equazioni di Volterra (al tempo 0): $q(x, 0) \rightarrow B(x, \alpha)$
- 2. Nucleo di Marchenko (al tempo 0): $B(x, \alpha) \rightarrow \Omega(\alpha, 0)$

Da
$$R(\lambda) = -b(\lambda)/a(\lambda)$$
 segue
 $\hat{R}(\alpha) + \int_{\alpha}^{+\infty} \hat{a}(\beta - \alpha)\hat{R}(\beta) d\beta + \hat{b}(\alpha) = 0$
dove $\hat{a}(\alpha) = B_1(\xi, \alpha)u_0^+(\alpha), \ \hat{b}(\alpha) = B_2(\xi, \alpha - 2\xi)u_{2\xi}^+(\alpha)$
Se $a(\lambda)$ non ha zeri

$$\Omega(\alpha, 0) = \hat{R}(\alpha).$$

Diversamente

$$\Omega(\alpha, 0) = \hat{R}(\alpha) + u_0^+(\alpha) \sum_{j=1}^N \Gamma_j e^{i\kappa_j \alpha}$$



dove i κ_j sono gli zeri di $a(\lambda)$ e i Γ_j costanti di normalizzazione.



- 1. Equazioni di Volterra (al tempo 0): $q(x,0) \rightarrow B(x,\alpha)$
- 2. Nucleo di Marchenko (al tempo 0): $B(x, \alpha) \rightarrow \Omega(\alpha, 0)$
- 3. Evoluzione del nucleo di Marchenko: $\Omega(\alpha, 0) \rightarrow \Omega(\alpha, t)$

L'evoluzione di Ω nel tempo dipende strettamente da quella di \hat{R} . Si calcola l'evoluzione di \hat{R} nel tempo risolvendo

$$egin{cases} \hat{R}_t(lpha,t)+4{f i}\hat{R}_{lpha,lpha}(lpha,t)=0, \quad t>0\ \hat{R}(lpha,0)=\hat{R}(lpha) \end{cases}$$

e si trova

$$\Omega(\alpha, t) = \hat{R}(\alpha, t) + u_0^+(\alpha) \sum_{j=1}^N \Gamma_j e^{4i\kappa_j^2 t} e^{i\kappa_j \alpha}$$



4



- 1. Equazioni di Volterra (al tempo 0): $q(x,0) \rightarrow B(x,\alpha)$
- 2. Nucleo di Marchenko (al tempo 0): $B(x, \alpha) \rightarrow \Omega(\alpha, 0)$
- 3. Evoluzione del nucleo di Marchenko: $\Omega(\alpha, 0) \rightarrow \Omega(\alpha, t)$
- 4. Equazioni di Marchenko (al tempo t): $\Omega(\alpha, t) \rightarrow B(x, \alpha; t)$

$$\begin{cases} B_1(x,\alpha;t) - \int_0^\infty \Omega^*(\alpha + \beta + 2x;t) B_2(x,\beta;t) \, \mathrm{d}\beta = 0\\ \int_0^\infty \Omega(\alpha + \beta + 2x;t) B_1(x,\beta;t) \, \mathrm{d}\beta + B_2(x,\alpha;t) = -\Omega(\alpha + 2x;t) \end{cases}$$





- 1. Equazioni di Volterra (al tempo 0): $q(x,0) \rightarrow B(x,\alpha)$
- 2. Nucleo di Marchenko (al tempo 0): $B(x, \alpha) \rightarrow \Omega(\alpha, 0)$
- 3. Evoluzione del nucleo di Marchenko: $\Omega(\alpha, 0) \rightarrow \Omega(\alpha, t)$
- 4. Equazioni di Marchenko (al tempo t): $\Omega(\alpha, t) \rightarrow B(x, \alpha; t)$
- 5. Calcolo del potenziale (al tempo t): $B(x, \alpha; t) \rightarrow q(x, t)$

$$q(x,t)=2B_2(x,0;t)$$





- 1. Equazioni di Volterra (al tempo 0): $q(x,0) \rightarrow B(x,\alpha)$
- 2. Nucleo di Marchenko (al tempo 0): $B(x, \alpha) \rightarrow \Omega(\alpha, 0)$
- 3. Evoluzione del nucleo di Marchenko: $\Omega(\alpha, 0) \rightarrow \Omega(\alpha, t)$
- 4. Equazioni di Marchenko (al tempo t): $\Omega(\alpha, t) \rightarrow B(x, \alpha; t)$
- 5. Calcolo del potenziale (al tempo t): $B(x, \alpha; t) \rightarrow q(x, t)$





- 1. sistema di Volterra $[q \rightarrow B]$: OK, costo $O(n^2)$;
- 2. sistema di Marchenko $[B \rightarrow \Omega]$: da rifinire, con struttura;
- 3. evoluzione del nucleo di Marchenko $[\Omega \rightarrow \Omega]$: \hat{R} OK, stati limite banale;
- 4. sistema di Marchenko [$\Omega \rightarrow B$]: OK, costo $O(n^2 \log(n))$, con struttura;
- 5. sistema di Volterra $[B \rightarrow q]$: banale, $\alpha = 0 \Rightarrow q(x, t) = 2B_2(x, 0; t)$.

Considerazioni:

- costo più elevato al punto 4. (1.)
- problemi di unicità al punto 2.



$$\begin{array}{c|c} \hline q(x,0) = \frac{-8ie^{2x}}{1+4e^{4x}} & \xrightarrow{Volterra} & B_1(x,\alpha) = \frac{-2e^{-\alpha}}{1+4e^{4x}} \\ B_3(x,\alpha) = \frac{4e^{2x-\alpha}}{1+4e^{4x}} & \xrightarrow{Marchenko} & a(\lambda) = \frac{\lambda-i}{\lambda+i}, \ b(\lambda) = 0 \\ \widehat{R} = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = 1 \\ \Omega(\alpha) = u_0^+(\alpha)e^{-\alpha} & \xrightarrow{Volterra} & \xrightarrow{$$



$$B_1(x, lpha) - \int_x^\infty q(y) B_3(y, lpha) \, \mathrm{d}y = 0$$



$$\begin{array}{c} \hline q(x,0) = \frac{-8ie^{2x}}{1+4e^{4x}} & \xrightarrow{\text{Volterra}} & B_1(x,\alpha) = \frac{-2e^{-\alpha}}{1+4e^{4x}} \\ B_3(x,\alpha) = \frac{4e^{2x-\alpha}}{1+4e^{4x}} & \xrightarrow{\text{Marchenko}} & a(\lambda) = \frac{\lambda-i}{\lambda+i}, \ b(\lambda) = 0 \\ \widehat{R} = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = 1 \\ \Omega(\alpha) = u_0^+(\alpha)e^{-\alpha} & \xrightarrow{\text{Volucions in t}} \\ \hline q(x,t) = \frac{-8ie^{2x-4it}}{1+4e^{4x}} & \xrightarrow{\text{Marchenko}} & B_1(x,\alpha;t) = \frac{-2e^{-\alpha}}{1+4e^{4x}} \\ B_3(x,\alpha;t) = \frac{4e^{2x-\alpha-4it}}{1+4e^{4x}} & \xrightarrow{\text{Marchenko}} & \widehat{R} = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = e^{-4it} \\ \Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha} & \xrightarrow{\text{Marchenko}} & B_1(x_i,\alpha_j) - \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+2}} - \underbrace{\int_{x_{i+2}}^{\infty} q(y)B_3(y,\alpha_j) \, dy}_{sostituisco} = 0 \\ \end{array}$$



$$\begin{array}{c|c} \hline q(x,0) = \frac{-8ie^{2x}}{1+4e^{4x}} & \xrightarrow{\text{Volterra}} & B_1(x,\alpha) = \frac{-2e^{-\alpha}}{1+4e^{4x}} \\ B_3(x,\alpha) = \frac{4e^{2x-\alpha}}{1+4e^{4x}} & \xrightarrow{\text{Marchenko}} & a(\lambda) = \frac{\lambda-i}{\lambda+i}, \ b(\lambda) = 0 \\ \widehat{R} = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = 1 \\ \Omega(\alpha) = u_0^+(\alpha)e^{-\alpha} & \xrightarrow{\text{Volucions in t}} \\ evolutions in t \\ \hline q(x,t) = \frac{-8ie^{2x-4it}}{1+4e^{4x}} & \xrightarrow{\text{B}_1(x,\alpha;t) = \frac{-2e^{-\alpha}}{1+4e^{4x}}} \\ B_3(x,\alpha;t) = \frac{4e^{2x-\alpha-4it}}{1+4e^{4x}} & \xrightarrow{\text{Marchenko}} & \widehat{R} = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = e^{-4it} \\ \Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha} & \xrightarrow{\text{Marchenko}} \\ \hline R = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = e^{-4it} \\ \Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha} & \xrightarrow{\text{Marchenko}} \\ \hline R = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = e^{-4it} \\ \hline \Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha} & \xrightarrow{\text{Marchenko}} \\ \hline R = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = e^{-4it} \\ \hline \Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha} & \xrightarrow{\text{Marchenko}} \\ \hline R = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = e^{-4it} \\ \hline \Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha} & \xrightarrow{\text{Marchenko}} \\ \hline R = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = e^{-4it} \\ \hline \Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha} & \xrightarrow{\text{Marchenko}} \\ \hline R = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = e^{-4it} \\ \hline R = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = e^{-4it} \\ \hline \Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha} & \xrightarrow{\text{Marchenko}} \\ \hline R = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = e^{-4it} \\ \hline \Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha} & \xrightarrow{\text{Marchenko}} \\ \hline R = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = e^{-4it} \\ \hline R = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = e^{-4it} \\ \hline R = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = e^{-4it} \\ \hline R = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = e^{-4it} \\ \hline R = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = e^{-4it} \\ \hline R = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = e^{-4it} \\ \hline R = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = e^{-4it} \\ \hline R = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = e^{-4it} \\ \hline R = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = e^{-4it} \\ \hline R = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = e^{-4it} \\ \hline R = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = e^{-4it} \\ \hline R = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = e^{-4it} \\ \hline R = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = e^{-4it} \\ \hline R = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = e^{-4it} \\ \hline R = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = e^{-4it} \\ \hline R = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = i, \ \Gamma_1 = e^{-4it} \\ \hline R = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = i, \ \Gamma$$





$$\begin{array}{c|c} \hline q(x,0) = \frac{-8ie^{2x}}{1+4e^{4x}} & \hline & Volterra \\ \hline g(x,0) = \frac{-8ie^{2x}}{1+4e^{4x}} & \hline & B_1(x,\alpha) = \frac{-2e^{-\alpha}}{1+4e^{4x}} \\ \hline & B_3(x,\alpha) = \frac{4e^{2x-\alpha}}{1+4e^{4x}} & \hline & Marchenko \\ \hline & \hat{R} = 0, \ \kappa_1 = \mathbf{i}, \ \Gamma_1 = 1 \\ \Omega(\alpha) = u_0^+(\alpha)e^{-\alpha} \\ \hline & \psi \\ evoluzione \ in \ t \\ \hline & \psi \\ \hline & evoluzione \ in \ t \\ \hline & B_1(x,\alpha;t) = \frac{-2e^{-\alpha}}{1+4e^{4x}} \\ \hline & B_3(x,\alpha;t) = \frac{4e^{2x-\alpha}-a_{it}}{1+4e^{4x}} \\ \hline & Marchenko \\ \hline & \hat{R} = 0, \ \kappa_1 = \mathbf{i}, \ \Gamma_1 = e^{-4it} \\ \Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha} \\ \hline & \Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha} \\ \hline & B_1(x,\alpha;t) = \frac{4e^{2x-\alpha}-a_{it}}{1+4e^{4x}} \\ \hline & \Psi \\ \hline & \Theta \\ \hline & \Theta$$

50





0

$$\begin{array}{c} q(x,0) = \frac{-8ie^{2x}}{1+4e^{4x}} \end{array} \xrightarrow{\text{Volterra}} \begin{array}{c} B_1(x,\alpha) = \frac{-2e^{-\alpha}}{1+4e^{4x}} \\ B_3(x,\alpha) = \frac{4e^{2x-\alpha}}{1+4e^{4x}} \end{array} \xrightarrow{\text{Marchenko}} \begin{array}{c} a(\lambda) = \frac{\lambda-i}{\lambda+i}, \ b(\lambda) = 0 \\ \widehat{R} = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = 1 \\ \Omega(\alpha) = u_0^+(\alpha)e^{-\alpha} \end{array} \\ \begin{array}{c} \varphi(\alpha) = u_0^+(\alpha)e^{-\alpha} \end{array} \end{array} \xrightarrow{\text{Volterra}} \begin{array}{c} \varphi(\alpha) = \frac{\lambda-i}{\lambda+i}, \ b(\lambda) = 0 \\ \widehat{R} = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = 1 \\ \Omega(\alpha) = u_0^+(\alpha)e^{-\alpha} \end{array} \\ \begin{array}{c} \varphi(\alpha) = u_0^+(\alpha)e^{-\alpha} \end{array} \\ \begin{array}{c} \varphi(\alpha) = u_0^+(\alpha)e^{-\alpha} \end{array} \\ \begin{array}{c} \varphi(\alpha) = u_0^+(\alpha)e^{-\alpha} \end{array} \end{array}$$





$$\begin{array}{c} \hline q(x,0) = \frac{-8ie^{2x}}{1+4e^{4x}} \end{array} & \xrightarrow{\text{Volterra}} \end{array} \xrightarrow{B_1(x,\alpha) = \frac{-2e^{-\alpha}}{1+4e^{4x}}} B_3(x,\alpha) = \frac{4e^{2x-\alpha}}{1+4e^{4x}} \end{array} \xrightarrow{Marchenko} \begin{array}{c} a(\lambda) = \frac{\lambda-i}{\lambda+i}, \ b(\lambda) = 0 \\ \widehat{R} = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = 1 \\ \Omega(\alpha) = u_0^+(\alpha)e^{-\alpha} \end{array} \\ & \downarrow \text{evoluzione in t} \\ \hline q(x,t) = \frac{-8ie^{2x-4it}}{1+4e^{4x}} \end{array} & \xrightarrow{B_1(x,\alpha;t) = \frac{-2e^{-\alpha}}{1+4e^{4x}}} B_3(x,\alpha;t) = \frac{4e^{2x-\alpha-4it}}{1+4e^{4x}} \end{array} \xrightarrow{Marchenko} \begin{array}{c} \widehat{R} = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = e^{-4it} \\ \widehat{\Omega}(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha} \end{array} \end{array}$$

Caso frequente nelle applicazioni

$$q_{\xi}(x,0) := u_{\xi}^{+}(x)q(x,0) \Rightarrow \begin{cases} B_{1,\xi}(x,\alpha) = u_{\xi}^{-}(x)B_{1}(\xi,\alpha) + u_{0}^{+}(x)B_{1}(x,\alpha) \\ B_{3,\xi}(x,\alpha) = u_{\xi}^{-}(x)u_{\xi}^{+}(x+\frac{\alpha}{2})B_{3}(\xi,\alpha-2(\xi-x)) \\ + u_{0}^{+}(x)B_{3}(x,\alpha) \end{cases}$$

slide 10 di 11

$$\begin{array}{c} \hline q(x,0) = \frac{-8ie^{2x}}{1+4e^{4x}} & \xrightarrow{Volterra} & B_1(x,\alpha) = \frac{-2e^{-\alpha}}{1+4e^{4x}} \\ B_3(x,\alpha) = \frac{4e^{2x-\alpha}}{1+4e^{4x}} & \xrightarrow{Marchenko} & a(\lambda) = \frac{\lambda-i}{\lambda+i}, \ b(\lambda) = 0 \\ \widehat{R} = 0, \ \kappa_1 = \mathbf{i}, \ \Gamma_1 = 1 \\ \Omega(\alpha) = u_0^+(\alpha)e^{-\alpha} & \xrightarrow{Volterra} & \xrightarrow{Volterra} & \underbrace{B_1(x,\alpha;t) = \frac{-2e^{-\alpha}}{1+4e^{4x}}}_{B_3(x,\alpha;t) = \frac{4e^{2x-\alpha}-4it}{1+4e^{4x}}} & \xrightarrow{Marchenko} & \overbrace{\widehat{R} = 0, \ \kappa_1 = \mathbf{i}, \ \Gamma_1 = e^{-4it}}_{\Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha}} & \xrightarrow{Marchenko} & \overbrace{\widehat{R} = 0, \ \kappa_1 = \mathbf{i}, \ \Gamma_1 = e^{-4it}}_{\Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha}} & \xrightarrow{Marchenko} & \xrightarrow{\widehat{R} = 0, \ \kappa_1 = \mathbf{i}, \ \Gamma_1 = e^{-4it}}_{\Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha}} & \xrightarrow{Marchenko} & \xrightarrow{\widehat{R} = 0, \ \kappa_1 = \mathbf{i}, \ \Gamma_1 = e^{-4it}}_{\Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha}} & \xrightarrow{Marchenko} & \xrightarrow{\widehat{R} = 0, \ \kappa_1 = \mathbf{i}, \ \Gamma_1 = e^{-4it}}_{\Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha}} & \xrightarrow{R = 0, \ \kappa_1 = \mathbf{i}, \ \Gamma_1 = e^{-4it}}_{\Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha}} & \xrightarrow{R = 0, \ \kappa_1 = \mathbf{i}, \ \Gamma_1 = e^{-4it}}_{\Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha}} & \xrightarrow{R = 0, \ \kappa_1 = \mathbf{i}, \ \Gamma_1 = e^{-4it}}_{\Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha}} & \xrightarrow{R = 0, \ \kappa_1 = \mathbf{i}, \ \Gamma_1 = e^{-4it}}_{\Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha}} & \xrightarrow{R = 0, \ \kappa_1 = \mathbf{i}, \ \Gamma_1 = e^{-4it}}_{\Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha}} & \xrightarrow{R = 0, \ \kappa_1 = \mathbf{i}, \ \Gamma_1 = e^{-4it}}_{\Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha}} & \xrightarrow{R = 0, \ \kappa_1 = \mathbf{i}, \ \Gamma_1 = e^{-4it}}_{\Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha}} & \xrightarrow{R = 0, \ \kappa_1 = \mathbf{i}, \ \Gamma_1 = e^{-4it}}_{\Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha}} & \xrightarrow{R = 0, \ \kappa_1 = \mathbf{i}, \ \Gamma_1 = e^{-4it}}_{\Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha}} & \xrightarrow{R = 0, \ \kappa_1 = \mathbf{i}, \ \Gamma_1 = \mathbf{i},$$

$$\begin{cases} B_1(x,\alpha;t) - \int_0^\infty \Omega^*(\alpha + \beta + 2x;t) B_2(x,\beta;t) \, \mathrm{d}\beta = 0\\ \int_0^\infty \Omega(\alpha + \beta + 2x;t) B_1(x,\beta;t) \, \mathrm{d}\beta + B_2(x,\alpha;t) = -\Omega(\alpha + 2x;t) \end{cases}$$



$$\begin{array}{c} \hline q(x,0) = \frac{-8ie^{2x}}{1+4e^{4x}} & \xrightarrow{Volterra} & B_1(x,\alpha) = \frac{-2e^{-\alpha}}{1+4e^{4x}} \\ B_3(x,\alpha) = \frac{4e^{2x-\alpha}}{1+4e^{4x}} & \xrightarrow{Marchenko} & a(\lambda) = \frac{\lambda-i}{\lambda+i}, \ b(\lambda) = 0 \\ \widehat{R} = 0, \ \kappa_1 = \mathbf{i}, \ \Gamma_1 = 1 \\ \Omega(\alpha) = u_0^+(\alpha)e^{-\alpha} & \xrightarrow{Volterra} & \xrightarrow{Volterra} & \underbrace{B_1(x,\alpha;t) = \frac{-2e^{-\alpha}}{1+4e^{4x}}}_{B_3(x,\alpha;t) = \frac{4e^{2x-\alpha}-4it}{1+4e^{4x}}} & \xrightarrow{Marchenko} & \overbrace{\widehat{R} = 0, \ \kappa_1 = \mathbf{i}, \ \Gamma_1 = e^{-4it}}_{\Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha}} & \xrightarrow{Marchenko} & \overbrace{\widehat{R} = 0, \ \kappa_1 = \mathbf{i}, \ \Gamma_1 = e^{-4it}}_{\Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha}} & \xrightarrow{Marchenko} & \xrightarrow{\widehat{R} = 0, \ \kappa_1 = \mathbf{i}, \ \Gamma_1 = e^{-4it}}_{\Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha}} & \xrightarrow{Marchenko} & \xrightarrow{\widehat{R} = 0, \ \kappa_1 = \mathbf{i}, \ \Gamma_1 = e^{-4it}}_{\Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha}} & \xrightarrow{Marchenko} & \xrightarrow{\widehat{R} = 0, \ \kappa_1 = \mathbf{i}, \ \Gamma_1 = e^{-4it}}_{\Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha}} & \xrightarrow{R = 0, \ \kappa_1 = \mathbf{i}, \ \Gamma_1 = e^{-4it}}_{\Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha}} & \xrightarrow{R = 0, \ \kappa_1 = \mathbf{i}, \ \Gamma_1 = e^{-4it}}_{\Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha}} & \xrightarrow{R = 0, \ \kappa_1 = \mathbf{i}, \ \Gamma_1 = e^{-4it}}_{\Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha}} & \xrightarrow{R = 0, \ \kappa_1 = \mathbf{i}, \ \Gamma_1 = e^{-4it}}_{\Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha}} & \xrightarrow{R = 0, \ \kappa_1 = \mathbf{i}, \ \Gamma_1 = e^{-4it}}_{\Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha}} & \xrightarrow{R = 0, \ \kappa_1 = \mathbf{i}, \ \Gamma_1 = e^{-4it}}_{\Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha}} & \xrightarrow{R = 0, \ \kappa_1 = \mathbf{i}, \ \Gamma_1 = e^{-4it}}_{\Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha}} & \xrightarrow{R = 0, \ \kappa_1 = \mathbf{i}, \ \Gamma_1 = e^{-4it}}_{\Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha}} & \xrightarrow{R = 0, \ \kappa_1 = \mathbf{i}, \ \Gamma_1 = e^{-4it}}_{\Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha}} & \xrightarrow{R = 0, \ \kappa_1 = \mathbf{i}, \ \Gamma_1 = \mathbf{i},$$

$$\begin{cases} B_1(x,\alpha;t) - \int_0^\infty \Omega^*(\alpha + \beta + 2x;t) B_2(x,\beta;t) \, \mathrm{d}\beta = 0\\ \int_0^\infty \Omega(\alpha + \beta + 2x;t) B_1(x,\beta;t) \, \mathrm{d}\beta + B_2(x,\alpha;t) = -\Omega(\alpha + 2x;t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} I & -H^*D \\ HD & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{r} \end{pmatrix}$$



$$\begin{array}{c} \hline q(x,0) = \frac{-8ie^{2x}}{1+4e^{4x}} & \xrightarrow{\text{Volterra}} & B_1(x,\alpha) = \frac{-2e^{-\alpha}}{1+4e^{4x}} \\ B_3(x,\alpha) = \frac{4e^{2x-\alpha}}{1+4e^{4x}} & \xrightarrow{\text{Marchenko}} & a(\lambda) = \frac{\lambda-i}{\lambda+i}, \ b(\lambda) = 0 \\ \widehat{R} = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = 1 \\ \Omega(\alpha) = u_0^+(\alpha)e^{-\alpha} & \xrightarrow{\text{volucione in t}} \\ \hline q(x,t) = \frac{-8ie^{2x-4it}}{1+4e^{4x}} & \xrightarrow{\text{Marchenko}} & \xrightarrow{\text{Marchenko}} & \widehat{R} = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = e^{-4it} \\ B_3(x,\alpha;t) = \frac{4e^{2x-\alpha-4it}}{1+4e^{4x}} & \xrightarrow{\text{Marchenko}} & \widehat{R} = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = e^{-4it} \\ \Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha} & \xrightarrow{\text{Marchenko}} \\ \hline \left[\begin{array}{c} I & -H^*D \\ HD & I \end{array} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{r} \end{pmatrix} \end{array}$$



$$\begin{array}{c} \hline q(x,0) = \frac{-8ie^{2x}}{1+4e^{4x}} & \xrightarrow{\text{Volterra}} & B_1(x,\alpha) = \frac{-2e^{-\alpha}}{1+4e^{4x}} \\ B_3(x,\alpha) = \frac{4e^{2x-\alpha}}{1+4e^{4x}} & \xrightarrow{\text{Marchenko}} & a(\lambda) = \frac{\lambda-i}{\lambda+i}, \ b(\lambda) = 0 \\ \widehat{R} = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = 1 \\ \Omega(\alpha) = u_0^+(\alpha)e^{-\alpha} & \xrightarrow{\text{volucione in t}} \\ \hline g(x,t) = \frac{-8ie^{2x-4it}}{1+4e^{4x}} & \xrightarrow{\text{B}_1(x,\alpha;t) = \frac{-2e^{-\alpha}}{1+4e^{4x}}} \\ B_3(x,\alpha;t) = \frac{4e^{2x-\alpha-4it}}{1+4e^{4x}} & \xrightarrow{\text{Marchenko}} & \widehat{R} = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = e^{-4it} \\ \Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha} & \xrightarrow{\text{Volucione in t}} \\ \hline g(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha} & \xrightarrow{\text{Marchenko}} & \xrightarrow{\text{Marchenko}} & \widehat{R} = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = e^{-4it} \\ \Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha} & \xrightarrow{\text{Volucione in t}} \\ \hline g(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha} & \xrightarrow{\text{Marchenko}} & \xrightarrow{\text{Marchenko}} & \xrightarrow{\text{Marchenko}} & \xrightarrow{\text{Marchenko}} & \xrightarrow{\text{Marchenko}} & \xrightarrow{\text{Marchenko}} \\ \hline g(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha} & \xrightarrow{\text{Marchenko}} & \xrightarrow{\text$$



$$\begin{array}{c} \hline q(x,0) = \frac{-8ie^{2x}}{1+4e^{4x}} & \xrightarrow{\text{Volterra}} & B_1(x,\alpha) = \frac{-2e^{-\alpha}}{1+4e^{4x}} \\ B_3(x,\alpha) = \frac{4e^{2x-\alpha}}{1+4e^{4x}} & \xrightarrow{\text{Marchenko}} & a(\lambda) = \frac{\lambda-i}{\lambda+i}, \ b(\lambda) = 0 \\ \widehat{R} = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = 1 \\ \Omega(\alpha) = u_0^+(\alpha)e^{-\alpha} & \xrightarrow{\text{volucione in t}} \\ g(x,t) = \frac{-8ie^{2x-4it}}{1+4e^{4x}} & \xrightarrow{\text{Marchenko}} & \xrightarrow{\text{Marchenko}} & \widehat{R} = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = e^{-4it} \\ B_3(x,\alpha;t) = \frac{4e^{2x-\alpha-4it}}{1+4e^{4x}} & \xrightarrow{\text{Marchenko}} & \widehat{R} = 0, \ \kappa_1 = i, \ \Gamma_1 = e^{-4it} \\ \Omega(\alpha,t) = u_0^+(\alpha)e^{-4it-\alpha} & \xrightarrow{\text{Marchenko}} \\ & \begin{bmatrix} I & -H^*D \\ HD & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{r} \end{pmatrix} \end{array}$$

 $[(I + DHDH^*)D] \mathbf{b}_2 = -D\mathbf{r}$



. . .

