

IL PROBLEMA DEI DATI SPARSI IN ELABORAZIONE DI IMMAGINI

Ivan Gerace

27 Febbraio 2007

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Perugia



IL PROBLEMA DEI DATI SPARSI

$$\mathbf{y} = T(\mathbf{x} + \mathbf{n})$$

dove

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \cdot m}$ è l'immagine originale;

$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n \cdot m}$ è l'immagine osservata;

$\mathbf{n} \in \mathbb{R}^{n \cdot m}$ è un rumore Gaussiano con media zero e varianza σ^2 nota;

$T \in \mathbb{R}^{(n \cdot m) \times (n \cdot m)}$ è una matrice diagonale la cui entrata $t_{(i,j)(i,j)}$ è uguale a 1 se il value in posizione (i,j) è disponibile, a 0 altrimenti.



Immagine originale \mathbf{x}



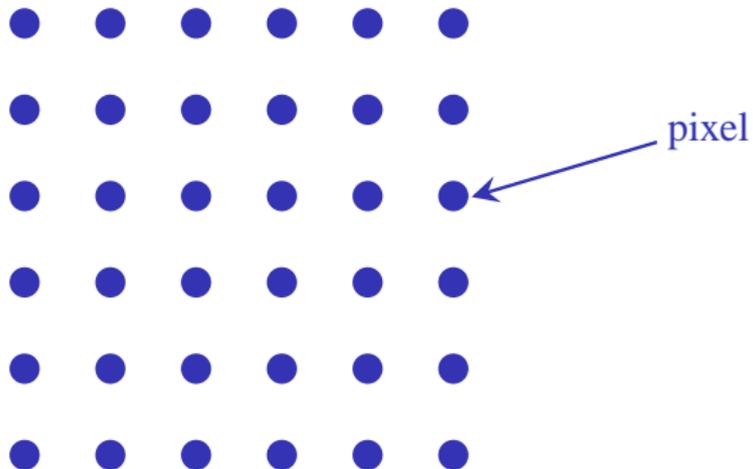
Immagine osservata \mathbf{y}

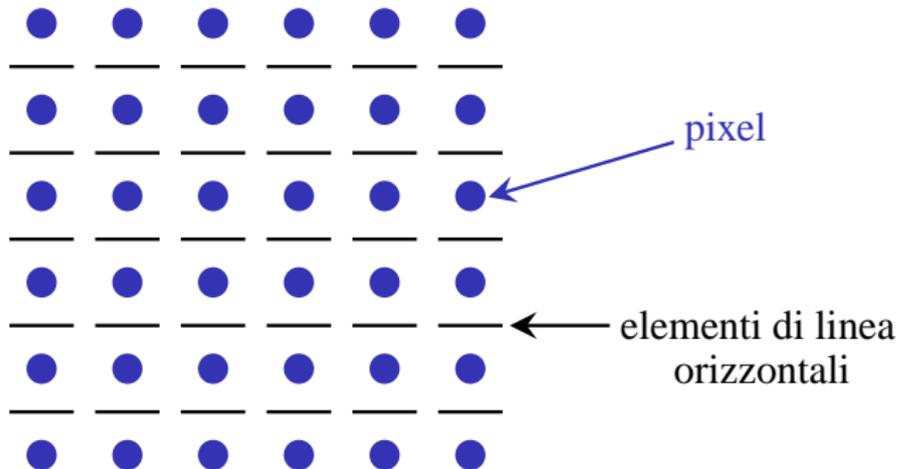


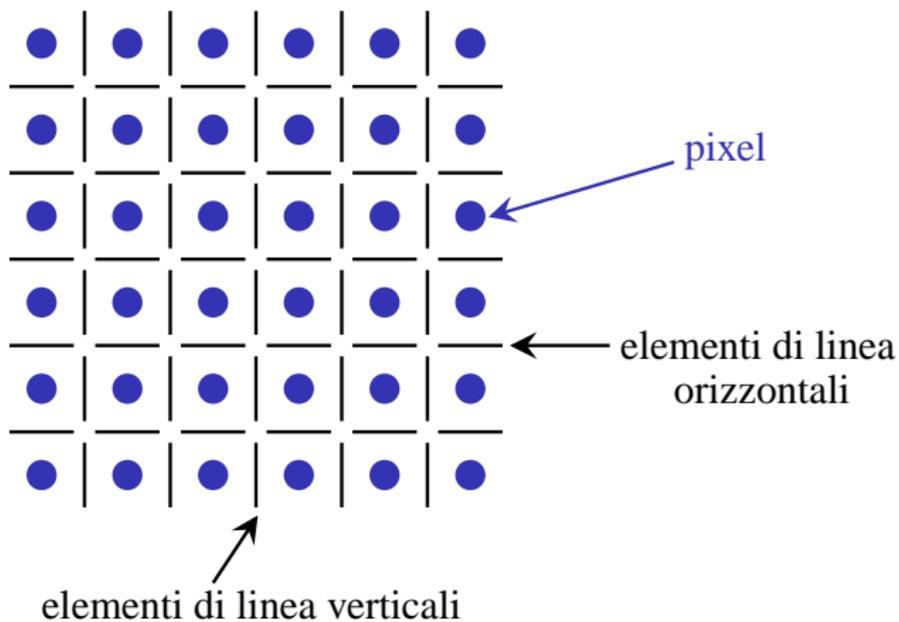
PROBLEMA

Il problema dei dati sparsi consiste nel determinare l'immagine originale x conoscendo i dati y , e l'operatore lineare T .









$$(1) \quad \begin{array}{c} s \bullet \\ t \bullet \end{array}$$

$$(2) \quad s \bullet \quad t \bullet$$

Operatore di derivazione finita associato:

$$D_c(\mathbf{u}) = u_s - u_t \quad \forall c \text{ del tipo (1) e (2)}$$



DEFINIZIONE

$C = \{c \mid c \text{ è una clique dell'immagine}\}.$



DEFINIZIONE

$$C = \{c \mid c \text{ è una clique dell'immagine}\}.$$

b_c è una variabile booleana associata alla clique c chiamata **elemento di linea**.



DEFINIZIONE

$$C = \{c \mid c \text{ è una clique dell'immagine}\}.$$

b_c è una variabile booleana associata alla clique c chiamata **elemento di linea**.

b è l'insieme di tutti gli elementi di linea.



DEFINIZIONE

Si definisce *soluzione regolarizzata* \mathbf{x}_{reg} del problema dei dati sparsi il minimo della seguente *funzione energia primale*:

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = \|T(\mathbf{y} - \mathbf{x})\|^2 + \sum_{c \in \mathcal{C}} [\lambda^2 (D_c \mathbf{x})^2 (1 - b_c) + \alpha b_c],$$



DEFINIZIONE

Si definisce *soluzione regolarizzata* \mathbf{x}_{reg} del problema dei dati sparsi il minimo della seguente *funzione energia primale*:

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = \|T(\mathbf{y} - \mathbf{x})\|^2 + \sum_{c \in \mathcal{C}} [\lambda^2 (D_c \mathbf{x})^2 (1 - b_c) + \alpha b_c],$$

con
 λ^2 parametro di regolarizzazione,



DEFINIZIONE

Si definisce *soluzione regolarizzata* \mathbf{x}_{reg} del problema dei dati sparsi il minimo della seguente *funzione energia primale*:

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = \|T(\mathbf{y} - \mathbf{x})\|^2 + \sum_{c \in \mathcal{C}} [\lambda^2 (D_c \mathbf{x})^2 (1 - b_c) + \alpha b_c],$$

con

λ^2 parametro di regolarizzazione,

α un peso positivo.



$$E_d(\mathbf{x}) = \inf_b E(\mathbf{x}, \mathbf{b}).$$



$$E_d(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{b}} E(\mathbf{x}, \mathbf{b}).$$

quindi, $E_d(\mathbf{b})$ è della forma

$$E_d(\mathbf{x}) = \|T(\mathbf{y} - A\mathbf{x})\|^2 + \sum_{c \in C} g(D_c \mathbf{x}),$$



$$E_d(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{b}} E(\mathbf{x}, \mathbf{b}).$$

quindi, $E_d(\mathbf{b})$ è della forma

$$E_d(\mathbf{x}) = \|T(\mathbf{y} - A\mathbf{x})\|^2 + \sum_{c \in C} g(D_c \mathbf{x}),$$

con

$$\begin{aligned} g(t) &= \inf_{b \in B} \{ \lambda^2 (1 - b) t^2 + \alpha b \} \\ &= \begin{cases} \lambda^2 t^2, & \text{se } |t| < \frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda} \\ \alpha, & \text{altrimenti.} \end{cases} \end{aligned}$$

la funzione g viene detta **funzione di interazione**



Sia $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ una riga dell'immagine e

$$I_i(j) = \{\{(i, j), (i + 1, j)\}, \{(i - 1, j), (i, j)\}, \{(i, j - 1), (i, j)\}\}$$



Sia $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ una riga dell'immagine e

$$I_i(j) = \{\{(i, j), (i + 1, j)\}, \{(i - 1, j), (i, j)\}, \{(i, j - 1), (i, j)\}\}$$

Definiamo l'energia della i -esima riga come

$$E_d^i(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^n \left[t_{(i,j)(i,j)}(x_{i,j} - y_{i,j})^2 + \sum_{c \in I_i(j)} g(D_c \mathbf{x}) \right] = \sum_{j=1}^n \rho_i(j, x_{i,j-1}, x_{i,j}),$$

dove \mathbf{x}_i è l' i -esima riga dell'immagine e ρ_i è una funzione definita fissando i valori delle righe \mathbf{x}_{i-1} e \mathbf{x}_{i+1} , i dati \mathbf{y} e la matrice T .



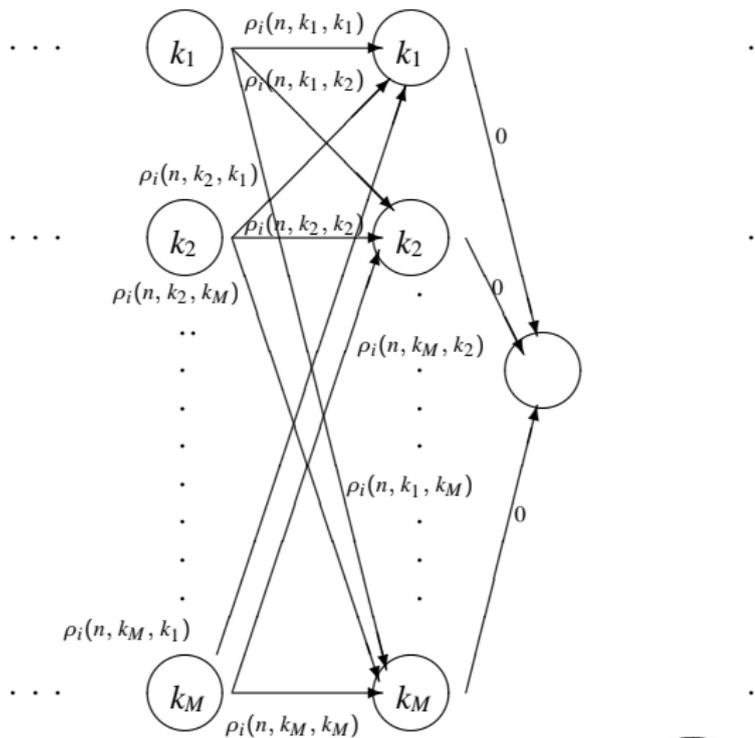
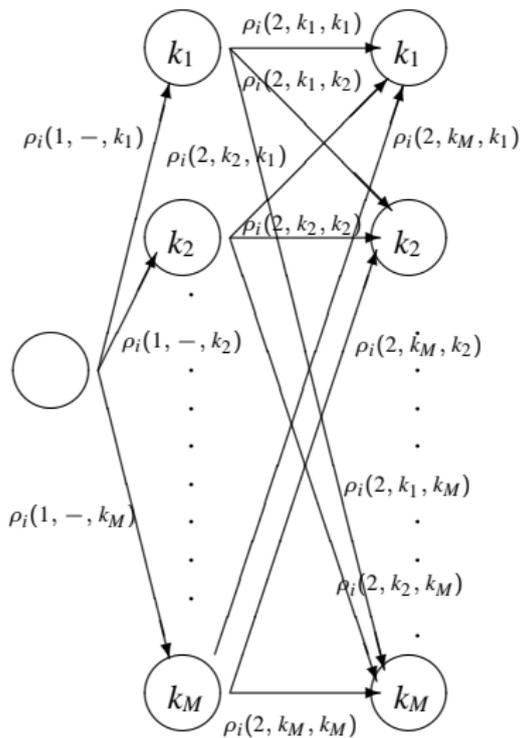




Immagine osservata y





Immagine osservata y

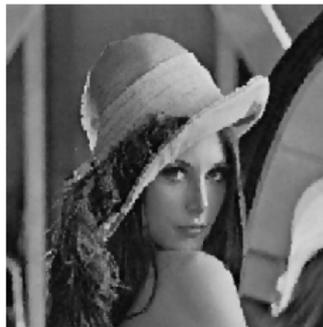


Immagine restaurata x_{reg}



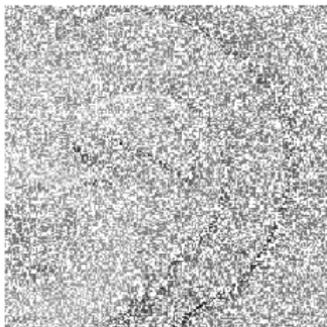


Immagine osservata y



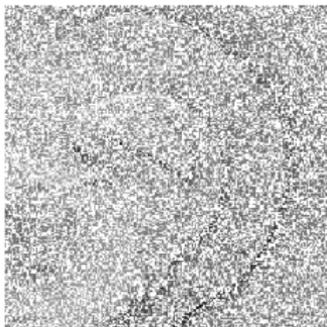


Immagine osservata y

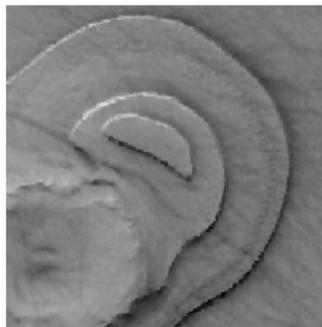


Immagine restaurata x_{reg}



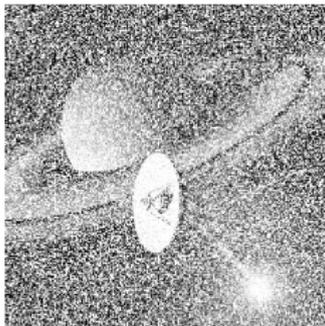


Immagine osservata y



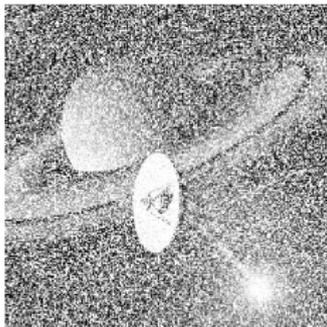


Immagine osservata y

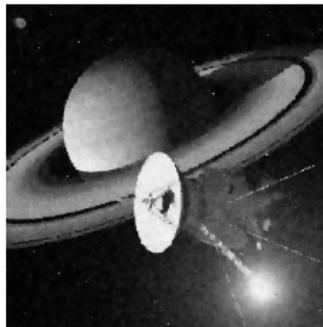


Immagine restaurata x_{reg}



DEFINIZIONE

Si definisce *soluzione regolarizzata* \mathbf{x}_{reg} del problema del del restauro di immagini il minimo della seguente *funzione energia primale*:

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2 + \sum_{c \in \mathcal{C}} [\lambda^2 (D_c \mathbf{x})^2 (1 - b_c) + \alpha b_c],$$

con

λ^2 parametro di regolarizzazione,

α un peso positivo.





Immagine osservata y





Immagine osservata y

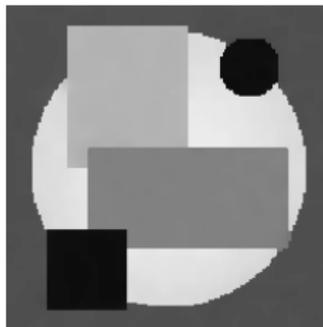


Immagine restaurata x_{reg}



Ipotesi: l'intensità luminosa di un pixel non varia con lo spostamento.



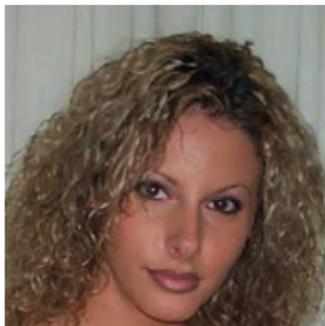
Ipotesi: l'intensità luminosa di un pixel non varia con lo spostamento.

Il problema della stima del flusso ottico consiste nel determinare lo spostamento che ogni pixel ha effettuato dalla prima alla seconda immagine.



Ipotesi: l'intensità luminosa di un pixel non varia con lo spostamento.

Il problema della stima del flusso ottico consiste nel determinare lo spostamento che ogni pixel ha effettuato dalla prima alla seconda immagine.



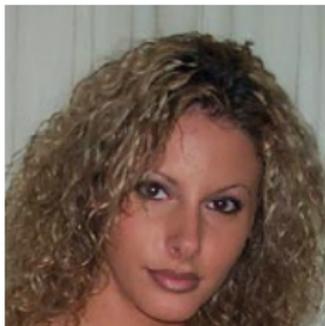
Prima immagine



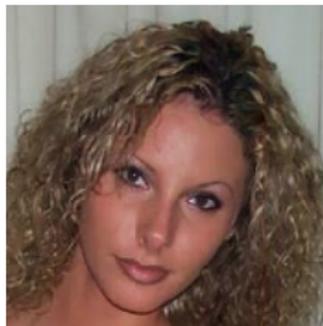
STIMA DEL FLUSSO OTTICO

Ipotesi: l'intensità luminosa di un pixel non varia con lo spostamento.

Il problema della stima del flusso ottico consiste nel determinare lo spostamento che ogni pixel ha effettuato dalla prima alla seconda immagine.



Prima immagine



Seconda immagine



DEFINIZIONE

Si definisce *soluzione regolarizzata* ($\mathbf{u}_{reg}, \mathbf{v}_{reg}$) del problema del del restauro di immagini il minimo della seguente *funzione energia primale*:

$$E(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{b}) = \sum_{i,j} (y_{i,j}^{(1)} - y_{i+u_{i,j},j+v_{i,j}}^{(2)})^2 + \sum_{c \in C} [\lambda^2 ((D_c \mathbf{u})^2 + (D_c \mathbf{v})^2) (1 - b_c) + \alpha b_c].$$

con

α un peso positivo

λ^2 parametro di regolarizzazione





Prima immagine $y^{(1)}$



Seconda immagine $y^{(2)}$





Prima immagine $y^{(1)}$

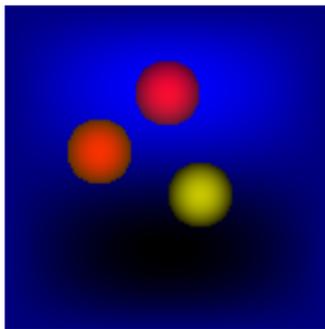


Seconda immagine $y^{(2)}$

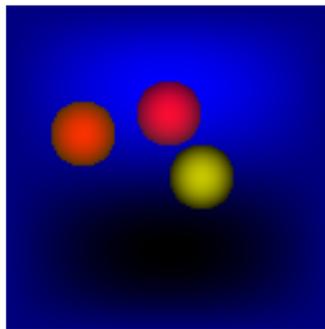


Seconda immagine stimata



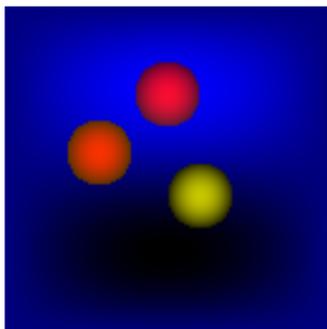


Prima immagine $y^{(1)}$

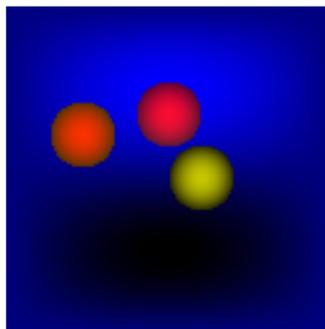


Seconda immagine $y^{(2)}$

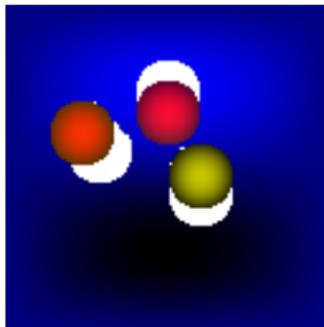




Prima immagine $y^{(1)}$

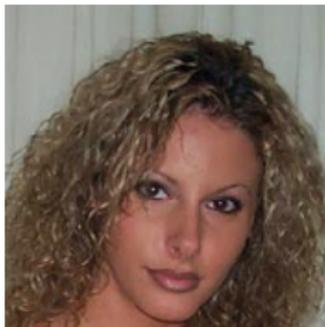


Seconda immagine $y^{(2)}$

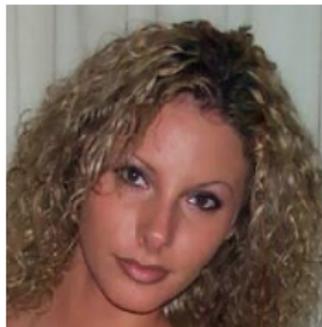


Seconda immagine stimata





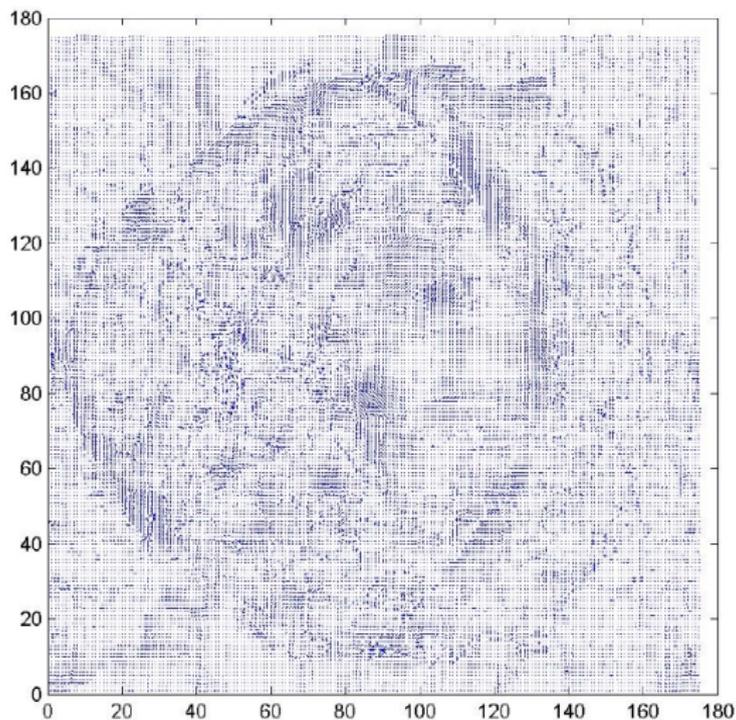
Prima immagine $y^{(1)}$



Seconda immagine $y^{(2)}$



RISULTATI SPERIMENTALI



Flusso ottico stimato $(\mathbf{u}_{reg}, \mathbf{v}_{reg})$



Sia

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(r)} \\ \mathbf{x}^{(g)} \\ \mathbf{x}^{(b)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3n \cdot m},$$

un immagine a colori dove $\mathbf{x}^{(r)}, \mathbf{x}^{(g)}, \mathbf{x}^{(b)} \in \mathbb{R}^{n \cdot m}$ sono rispettivamente i canali rosso, verde e blu in notazione lessicografica.



Il fenomeno della mosaicatura di una immagine può essere così descritto

$$y = M(x + n),$$

dove



Il fenomeno della mosaicatura di una immagine può essere così descritto

$$\mathbf{y} = M (\mathbf{x} + \mathbf{n}),$$

dove

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3n \cdot m}$ è l'immagine a colori ideale;



Il fenomeno della mosaicatura di una immagine può essere così descritto

$$\mathbf{y} = M (\mathbf{x} + \mathbf{n}),$$

dove

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3n \cdot m}$ è l'immagine a colori ideale;

$\mathbf{n} \in \mathbb{R}^{3n \cdot m}$ è il rumore su ogni componente che viene assunto essere Gaussiano, bianco indipendente con media nulla e varianza data σ^2 ;



Il fenomeno della mosaicatura di una immagine può essere così descritto

$$\mathbf{y} = M (\mathbf{x} + \mathbf{n}),$$

dove

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3n \cdot m}$ è l'immagine a colori ideale;

$\mathbf{n} \in \mathbb{R}^{3n \cdot m}$ è il rumore su ogni componente che viene assunto essere Gaussiano, bianco indipendente con media nulla e varianza data σ^2 ;

$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{3n \cdot m}$ l'immagine mosaicata;



Il fenomeno della mosaicatura di una immagine può essere così descritto

$$\mathbf{y} = M (\mathbf{x} + \mathbf{n}),$$

dove

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3n \cdot m}$ è l'immagine a colori ideale;

$\mathbf{n} \in \mathbb{R}^{3n \cdot m}$ è il rumore su ogni componente che viene assunto essere Gaussiano, bianco indipendente con media nulla e varianza data σ^2 ;

$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{3n \cdot m}$ l'immagine mosaicata;

$M \in \mathbb{R}^{(3n \cdot m) \times (3n \cdot m)}$ è un operatore lineare che è strutturato come segue:



$$M = \begin{pmatrix} M^{(r)} & O & O \\ O & M^{(g)} & O \\ O & O & M^{(b)} \end{pmatrix},$$

dove $O \in \mathbb{R}^{(n \cdot m) \times (n \cdot m)}$ è la matrice nulla, $M^{(r)}$, $M^{(g)}$ e $M^{(b)}$ sono matrici diagonali con

$$m_{(i,j)(i,j)}^{(r)} = \begin{cases} 1 & i \equiv_2 j \equiv_2 0 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$m_{(i,j)(i,j)}^{(g)} = \begin{cases} 1 & i \not\equiv_2 j \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$m_{(i,j)(i,j)}^{(b)} = \begin{cases} 1 & i \equiv_2 j \equiv_2 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$



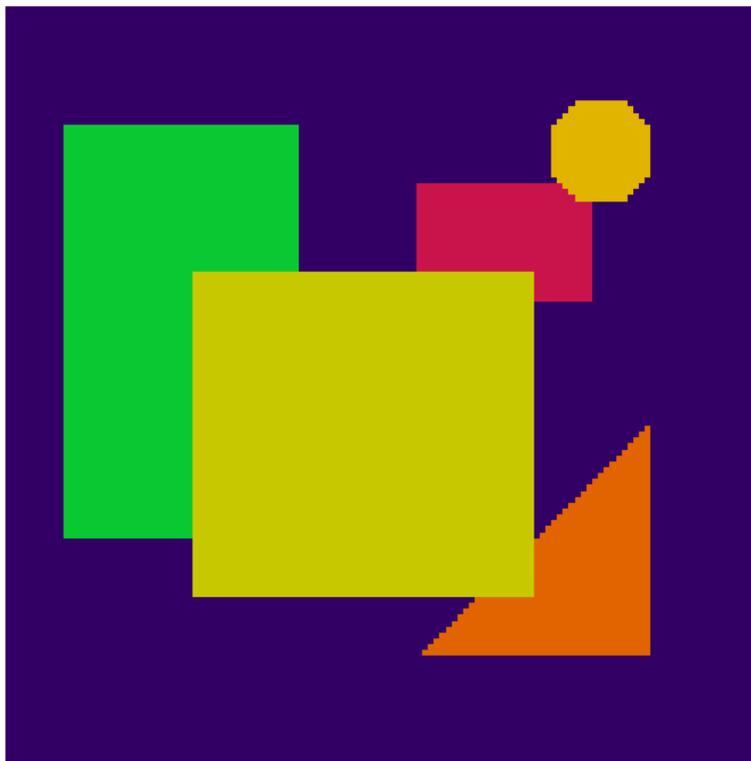
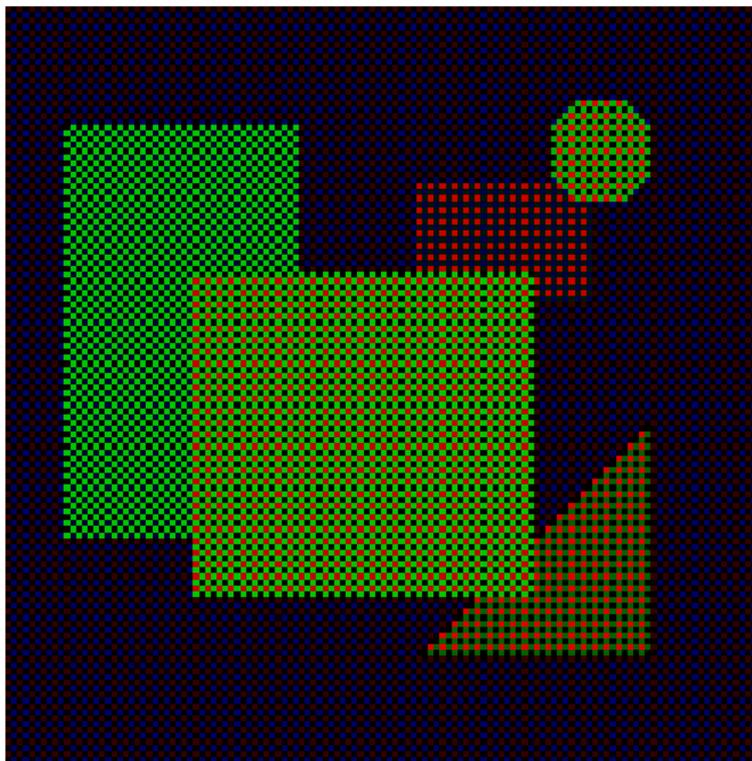


IMMAGINE DEMOSAICATA



PROBLEMA

Il problema della demosaicatura consiste nel determinare l'immagine originale a colori x conoscendo l'immagine mosaicata y , e la struttura dell'operatore lineare D .



FILTRO BILINEARE (1978)

La soluzione x_{bilin} viene definita come

$$x_{bilin}^{(g)}(i,j) = \begin{cases} y_{(i,j)}^{(g)} & i \not\equiv_2 j \\ \frac{y_{(i+1,j)}^{(g)} + y_{(i-1,j)}^{(g)} + y_{(i,j+1)}^{(g)} + y_{(i,j-1)}^{(g)}}{4} & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

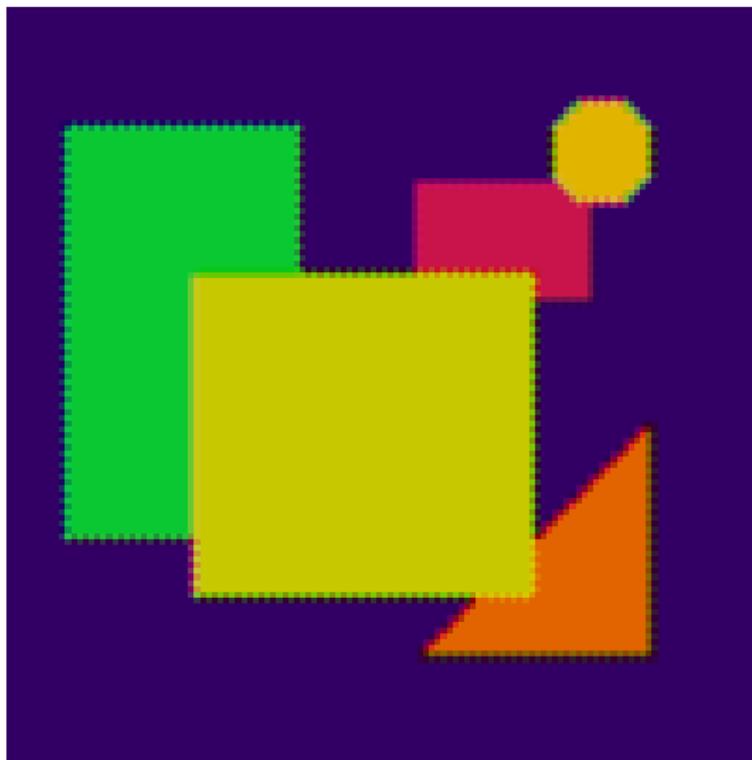
$$x_{bilin}^{(r)}(i,j) = \begin{cases} y_{(i,j)}^{(r)} & i \equiv_2 j \equiv_2 0 \\ \frac{y_{(i,j-1)}^{(r)} + y_{(i,j+1)}^{(r)}}{2} & i \equiv_2 0 \ \& \ j \equiv_2 1 \\ \frac{y_{(i-1,j)}^{(r)} + y_{(i+1,j)}^{(r)}}{2} & i \equiv_2 1 \ \& \ j \equiv_2 0 \\ \frac{y_{(i-1,j-1)}^{(r)} + y_{(i+1,j-1)}^{(r)} + y_{(i-1,j+1)}^{(r)} + y_{(i+1,j+1)}^{(r)}}{4} & \text{altrimenti;} \end{cases}$$



$$x_{bilin}^{(b)}(i,j) = \begin{cases} y_{(i,j)}^{(b)} & i \equiv_2 j \equiv_2 0 \\ \frac{y_{(i,j-1)}^{(b)} + y_{(i,j+1)}^{(b)}}{2} & i \equiv_2 0 \ \& \ j \equiv_2 1 \\ \frac{y_{(i-1,j)}^{(b)} + y_{(i+1,j)}^{(b)}}{2} & i \equiv_2 1 \ \& \ j \equiv_2 0 \\ \frac{y_{(i-1,j-1)}^{(b)} + y_{(i+1,j-1)}^{(b)} + y_{(i-1,j+1)}^{(b)} + y_{(i+1,j+1)}^{(b)}}{4} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$



FILTRO BILINEARE (1978)



Siano

$$I^t(i,j) = \{(k,l) \mid |k-i| \leq t\} \quad t \geq 1,$$

$$v_{(i,j)}^{(rg)} = \text{median}\{x_{bilin(i,j)}^{(r)} - x_{bilin(i,j)}^{(g)} \mid (i,j) \in I^t(i,j)\},$$

$$v_{(i,j)}^{(bg)} = \text{median}\{x_{bilin(i,j)}^{(b)} - x_{bilin(i,j)}^{(g)} \mid (i,j) \in I^t(i,j)\}.$$





Immagine osservata





Immagine osservata



Immagine restaurata



La soluzione x_{friman} viene definita come

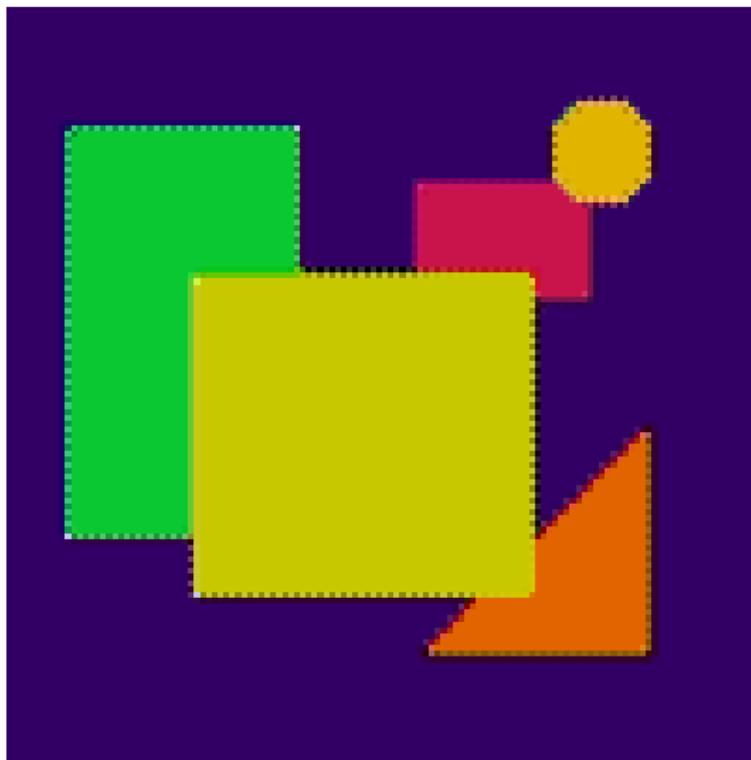
$$x_{friman}^{(g)}(i,j) = \begin{cases} y_{(i,j)}^{(g)} & i \not\equiv_2 j \\ \frac{(y_{(i,j)}^{(r)} - v_{(i,j)}^{(rg)}) + (y_{(i,j)}^{(b)} - v_{(i,j)}^{(bg)})}{2} & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

$$x_{friman}^{(r)}(i,j) = \begin{cases} y_{(i,j)}^{(r)} & i \equiv_2 j \equiv_2 0 \\ x_{friman}^{(g)}(i,j) + v_{(i,j)}^{(rg)} & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

$$x_{friman}^{(b)}(i,j) = \begin{cases} y_{(i,j)}^{(b)} & i \equiv_2 j \equiv_2 1 \\ x_{friman}^{(g)}(i,j) + v_{(i,j)}^{(bg)} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$



FILTRO DI FRIMAN (1988)



FILTRO DI LAROCHE-PRESCOTT (1994)

Siano $h_{(i,j)}^{(r)}$, $v_{(i,j)}^{(r)}$, $h_{(i,j)}^{(b)}$, $v_{(i,j)}^{(b)}$ le derivate seconde orizzontali e verticale rispettivamente del rosso e del blu definiti come

$$h_{(i,j)}^{(r)} = \begin{cases} y_{(i,j-2)}^{(r)} - 2y_{(i,j)}^{(r)} + y_{(i,j+2)}^{(r)} & i \equiv_2 j \equiv_2 0 \\ \perp & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

$$v_{(i,j)}^{(r)} = \begin{cases} y_{(i-2,j)}^{(r)} - 2y_{(i,j)}^{(r)} + y_{(i+2,j)}^{(r)} & i \equiv_2 j \equiv_2 0 \\ \perp & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

$$h_{(i,j)}^{(b)} = \begin{cases} y_{(i,j-2)}^{(b)} - 2y_{(i,j)}^{(b)} + y_{(i,j+2)}^{(b)} & i \equiv_2 j \equiv_2 1 \\ \perp & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

$$v_{(i,j)}^{(b)} = \begin{cases} y_{(i-2,j)}^{(b)} - 2y_{(i,j)}^{(b)} + y_{(i+2,j)}^{(b)} & i \equiv_2 j \equiv_2 0 \\ \perp & \text{altrimenti.} \end{cases}$$



La soluzione $x_{lp}^{(g)}$ viene definita come:

$$x_{lp}^{(g)} = \begin{cases} y_{(i,j)}^{(g)} & i \not\equiv_2 j \\ \frac{y_{(i,j-1)}^{(g)} + y_{(i,j+1)}^{(g)}}{2} & (|h_{(i,j)}^{(b)}| < |v_{(i,j)}^{(b)}| \& i \equiv_2 j \equiv_2 1) \text{ or} \\ & (|h_{(i,j)}^{(r)}| < |v_{(i,j)}^{(r)}|, \& i \equiv_2 j \equiv_2 0) \\ \frac{y_{(i-1,j)}^{(g)} + y_{(i+1,j)}^{(g)}}{2} & (|h_{(i,j)}^{(b)}| > |v_{(i,j)}^{(b)}| \& i \equiv_2 j \equiv_2 1) \text{ or} \\ & (|h_{(i,j)}^{(r)}| > |v_{(i,j)}^{(r)}| \& i \equiv_2 j \equiv_2 0) \\ \frac{y_{(i-1,j-1)}^{(g)} + y_{(i+1,j-1)}^{(g)} + y_{(i-1,j+1)}^{(g)} + y_{(i+1,j+1)}^{(g)}}{4} & (|h_{(i,j)}^{(b)}| = |v_{(i,j)}^{(b)}| \& i \equiv_2 j \equiv_2 1) \text{ or} \\ & (|h_{(i,j)}^{(r)}| = |v_{(i,j)}^{(r)}| \& i \equiv_2 j \equiv_2 0); \end{cases}$$



FILTRO DI LAROCHE-PRESCOTT (1994)

$$x_{lp}^{(r)}(i,j) = \begin{cases} y_{(i,j)}^{(r)} & i \equiv_2 j \equiv_2 0 \\ \frac{y_{(i,j-1)}^{(r)} - y_{(i,j-1)}^{(g)}}{2} + \frac{y_{(i,j+1)}^{(r)} - y_{(i,j+1)}^{(g)}}{2} + y_{(i,j)}^{(g)} & i \equiv_2 0 \ \& \ j \equiv_2 1 \\ \frac{y_{(i-1,j)}^{(r)} - y_{(i-1,j)}^{(g)}}{2} + \frac{y_{(i+1,j)}^{(r)} - y_{(i+1,j)}^{(g)}}{2} + y_{(i,j)}^{(g)} & i \equiv_2 1 \ \& \ j \equiv_2 0 \\ \frac{y_{(i-1,j-1)}^{(r)} + y_{(i-1,j-1)}^{(g)}}{4} + \frac{y_{(i+1,j-1)}^{(r)} + y_{(i+1,j-1)}^{(g)}}{4} + & i \equiv_2 j \equiv_2 1; \\ \frac{y_{(i-1,j+1)}^{(r)} + y_{(i-1,j+1)}^{(g)}}{4} + \frac{y_{(i+1,j+1)}^{(r)} + y_{(i+1,j+1)}^{(g)}}{4} + x_{lp}^{(g)}(i,j) & \end{cases}$$

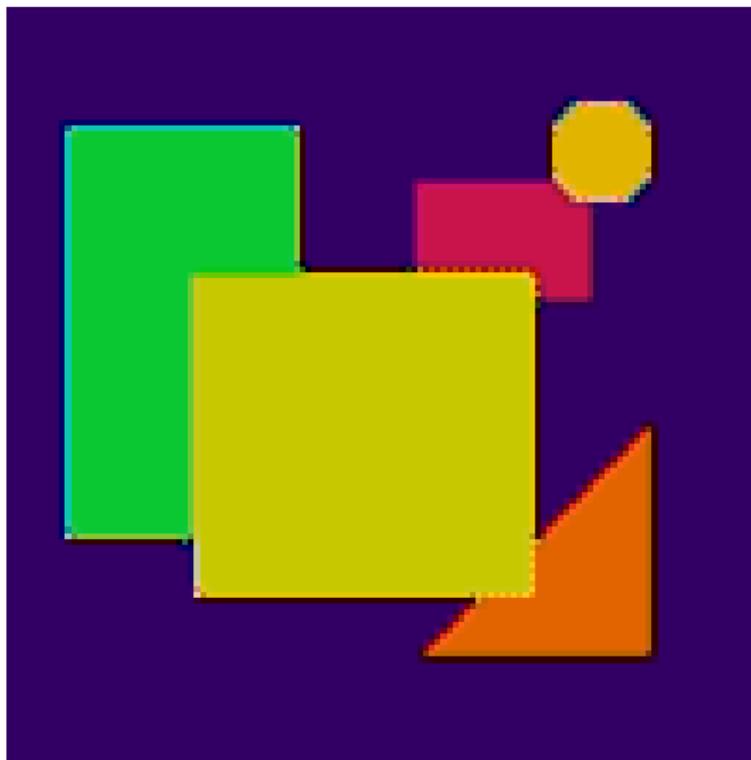


FILTRO DI LAROCHE-PRESCOTT (1994)

$$x_{lp}^{(b)}(i,j) = \begin{cases} y_{(i,j)}^{(b)} & i \equiv_2 j \equiv_2 0 \\ \frac{y_{(i,j-1)}^{(b)} - y_{(i,j-1)}^{(g)}}{2} + \frac{y_{(i,j+1)}^{(b)} - y_{(i,j+1)}^{(g)}}{2} + y_{(i,j)}^{(g)} & i \equiv_2 0 \ \& \ j \equiv_2 1 \\ \frac{y_{(i-1,j)}^{(b)} - y_{(i-1,j)}^{(g)}}{2} + \frac{y_{(i+1,j)}^{(b)} - y_{(i+1,j)}^{(g)}}{2} + y_{(i,j)}^{(g)} & i \equiv_2 1 \ \& \ j \equiv_2 0 \\ \frac{y_{(i-1,j-1)}^{(b)} + y_{(i-1,j-1)}^{(g)}}{4} + \frac{y_{(i+1,j-1)}^{(b)} + y_{(i+1,j-1)}^{(g)}}{4} + & i \equiv_2 j \equiv_2 1. \\ \frac{y_{(i-1,j+1)}^{(b)} + y_{(i-1,j+1)}^{(g)}}{4} + \frac{y_{(i+1,j+1)}^{(b)} + y_{(i+1,j+1)}^{(g)}}{4} + x_{lp}^{(g)}(i,j) & \end{cases}$$



FILTRO DI LAROCHE-PRESCOTT (1994)



La soluzione $x_{malv}^{(g)}$ viene definita come:

$$x_{malv}^{(g)}(i,j) = \begin{cases} y_{(i,j)}^{(g)} & i \not\equiv j \\ x_{bilin}^{(g)}(i,j) + \frac{4y_{(i,j)}^{(r)}}{8} + \frac{-y_{(i-2,j)}^{(r)} - y_{(i+1,j)}^{(r)} - y_{(i,j-2)}^{(r)} - y_{(i,j+2)}^{(r)}}{8} & i \equiv_2 j \equiv_2 0 \\ x_{bilin}^{(g)}(i,j) + \frac{4y_{(i,j)}^{(b)}}{8} + \frac{-y_{(i-2,j)}^{(b)} - y_{(i+1,j)}^{(b)} - y_{(i,j-2)}^{(b)} - y_{(i,j+2)}^{(b)}}{8} & i \equiv_2 j \equiv_2 1; \end{cases}$$



FILTRO DI MALVAR (2004)

$$x_{malv}^{(r)}(i,j) = \begin{cases}
 y_{(i,j)}^{(r)} & i \equiv_2 j \equiv_2 0 \\
 x_{bilin}^{(r)}(i,j) + \frac{10y_{(i,j)}^{(g)}}{16} + \frac{-2y_{(i-1,j-1)}^{(g)} - 2y_{(i+1,j-1)}^{(g)} - 2y_{(i-1,j+1)}^{(g)} - 2y_{(i+1,j+1)}^{(g)}}{16} + \frac{-2y_{(i,j-2)}^{(g)} - 2y_{(i,j+2)}^{(g)} + y_{(i-2,j)}^{(g)} + y_{(i+2,j)}^{(g)}}{16} & i \equiv_2 0 \ \& \ j \equiv_2 1 \\
 x_{bilin}^{(r)}(i,j) + \frac{10y_{(i,j)}^{(g)}}{16} + \frac{-2y_{(i-1,j-1)}^{(g)} - 2y_{(i+1,j-1)}^{(g)} - 2y_{(i-1,j+1)}^{(g)} - 2y_{(i+1,j+1)}^{(g)}}{16} + \frac{-2y_{(i,j-2)}^{(g)} - 2y_{(i,j+2)}^{(g)} + y_{(i-2,j)}^{(g)} + y_{(i+2,j)}^{(g)}}{16} & i \equiv_2 1 \ \& \ j \equiv_2 0 \\
 x_{bilin}^{(r)}(i,j) + \frac{12y_{(i,j)}^{(b)}}{16} + \frac{-3y_{(i,j+2)}^{(b)} - 2y_{(i,j-2)}^{(b)} + y_{(i-2,j)}^{(b)} + y_{(i+2,j)}^{(b)}}{16} & i \equiv_2 j \equiv_2 1;
 \end{cases}$$



FILTRO DI MALVAR (2004)

$$x_{malv}^{(b)}(i,j) = \begin{cases} y_{(i,j)}^{(b)} & i \equiv_2 j \equiv_2 1 \\ x_{bilin}^{(b)}(i,j) + \frac{10y_{(i,j)}^{(g)}}{16} + \frac{-2y_{(i-1,j-1)}^{(g)} - 2y_{(i+1,j-1)}^{(g)} - 2y_{(i-1,j+1)}^{(g)} - 2y_{(i+1,j+1)}^{(g)}}{16} + \frac{-2y_{(i,j-2)}^{(g)} - 2y_{(i,j+2)}^{(g)} + y_{(i-2,j)}^{(g)} + y_{(i+2,j)}^{(g)}}{16} & i \equiv_2 1 \& j \equiv_2 0 \\ x_{bilin}^{(b)}(i,j) + \frac{10y_{(i,j)}^{(g)}}{16} + \frac{-2y_{(i-1,j-1)}^{(g)} - 2y_{(i+1,j-1)}^{(g)} - 2y_{(i-1,j+1)}^{(g)} - 2y_{(i+1,j+1)}^{(g)}}{16} + \frac{-2y_{(i,j-2)}^{(g)} - 2y_{(i,j+2)}^{(g)} + y_{(i-2,j)}^{(g)} + y_{(i+2,j)}^{(g)}}{16} & i \equiv_2 0 \& j \equiv_2 1 \\ x_{bilin}^{(b)}(i,j) + \frac{12y_{(i,j)}^{(r)}}{16} + \frac{-3y_{(i,j+2)}^{(r)} - 2y_{(i,j-2)}^{(r)} + y_{(i-2,j)}^{(r)} + y_{(i+2,j)}^{(r)}}{16} & i \equiv_2 j \equiv_2 0. \end{cases}$$



$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 16 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$



Immagine restaurata



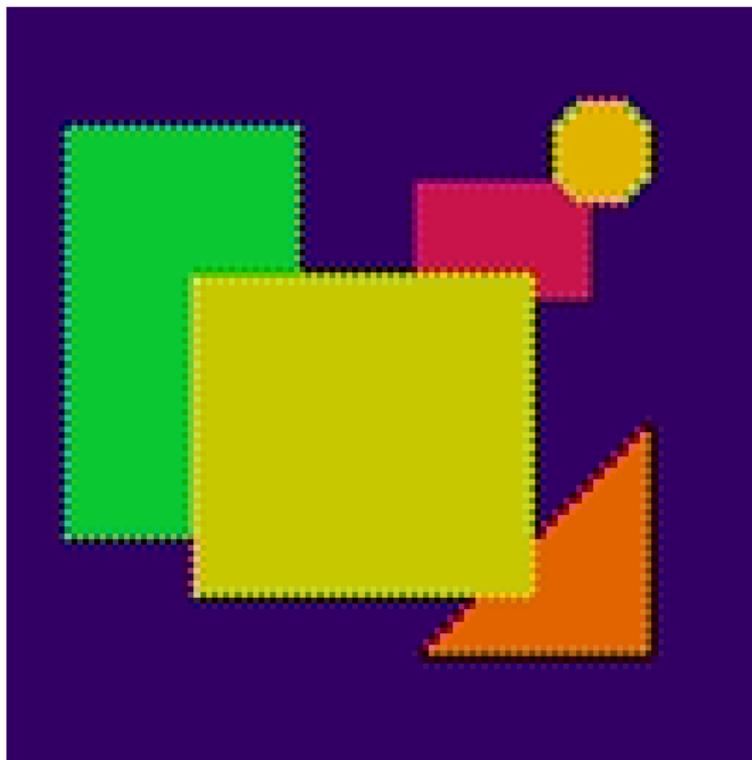
$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 16 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

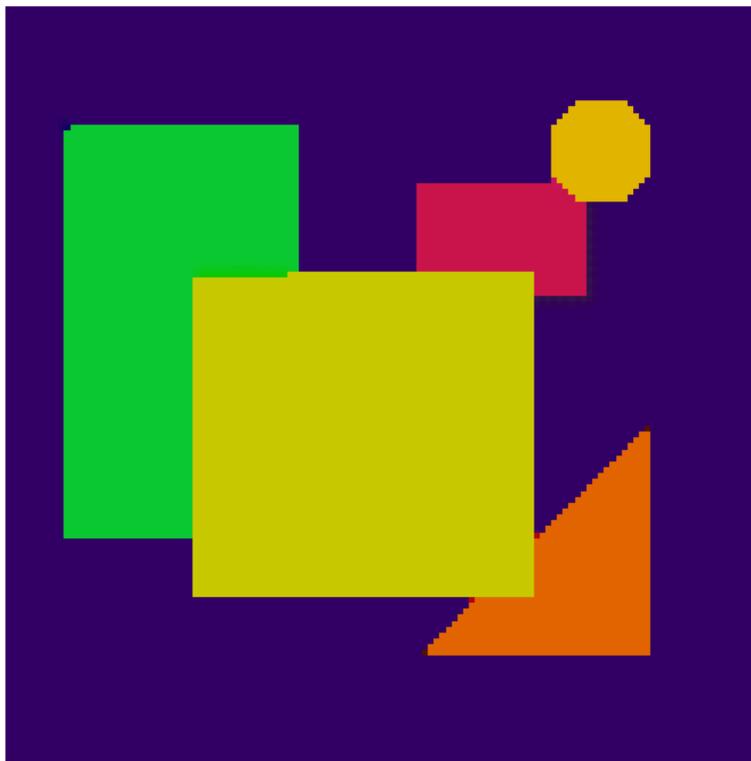


Immagine restaurata



FILTRO DI MALVAR (2004)





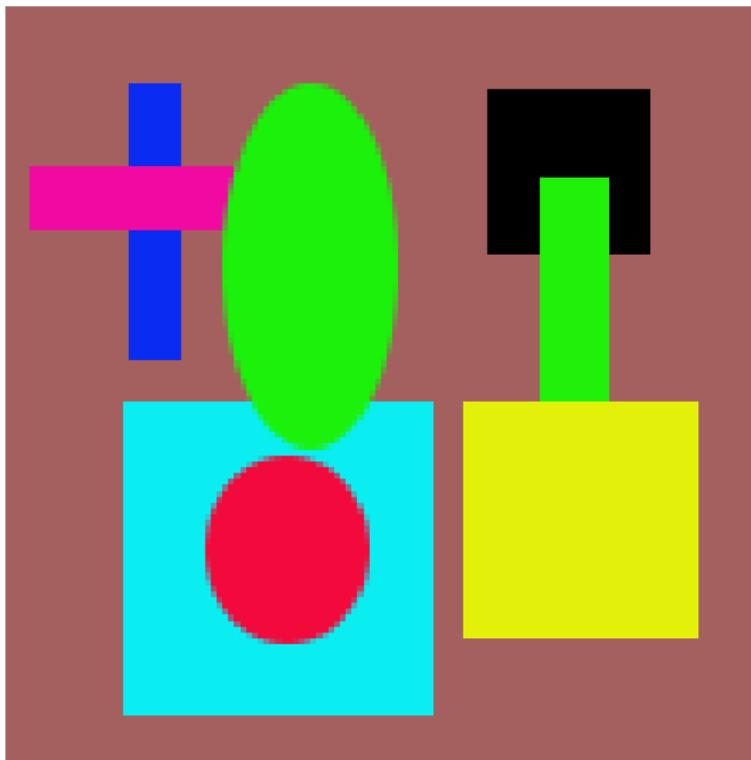
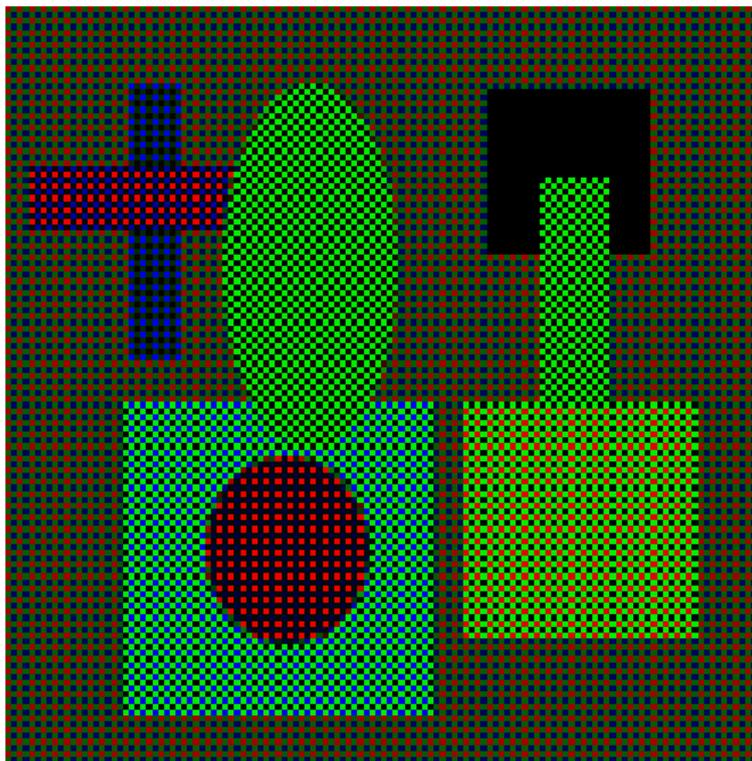
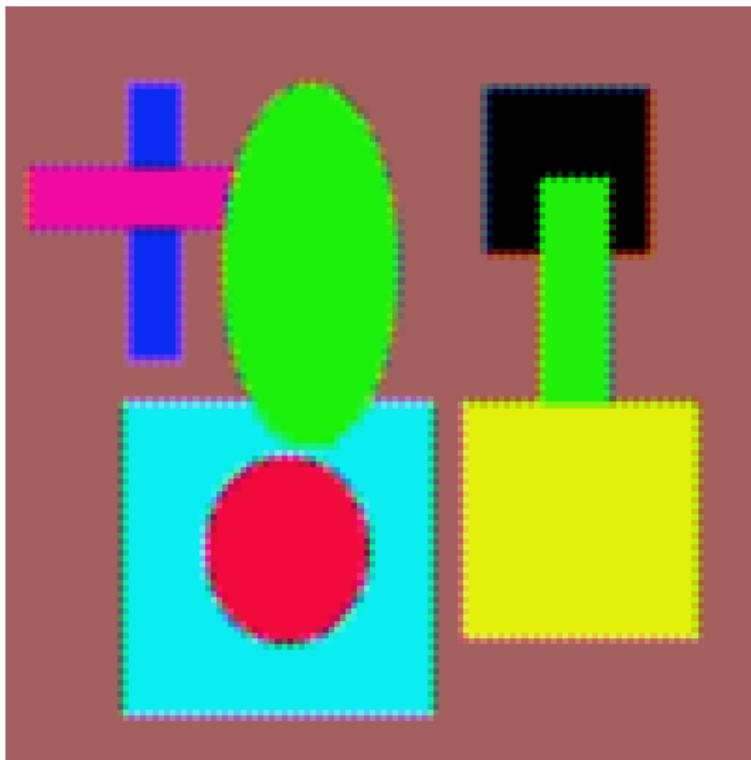


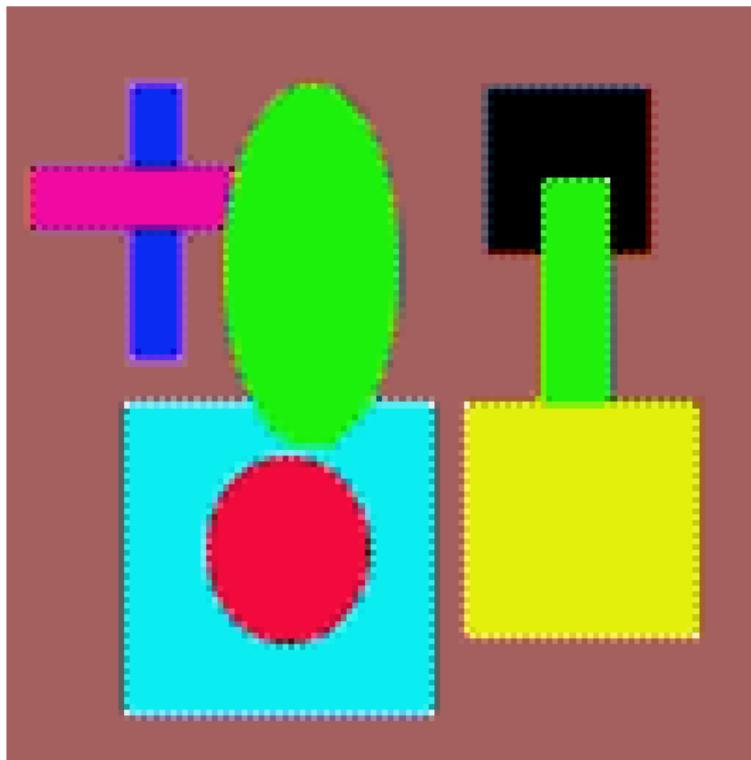
IMMAGINE MOSAICATA



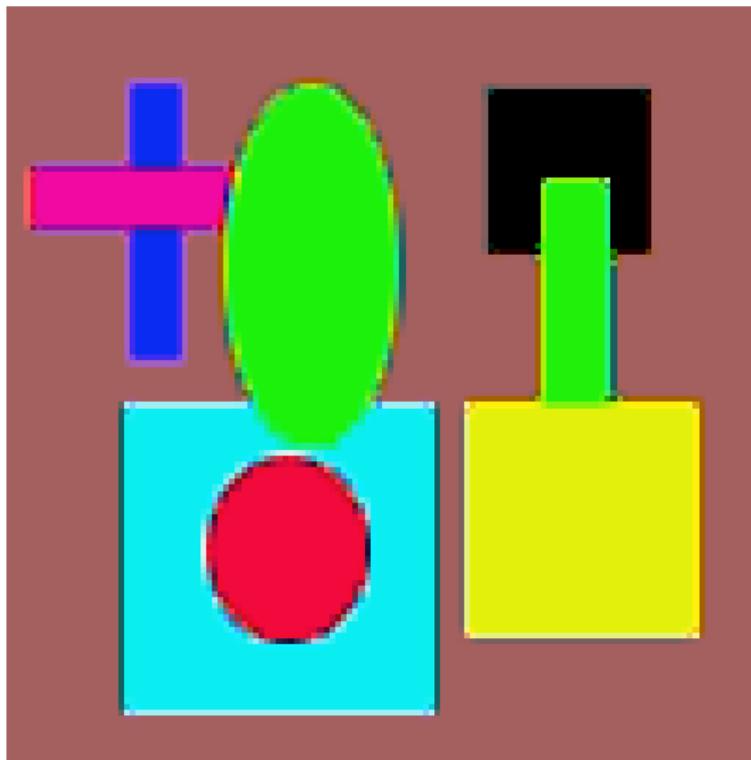
RESTAURO TRAMITE FILTRO BILINEARE



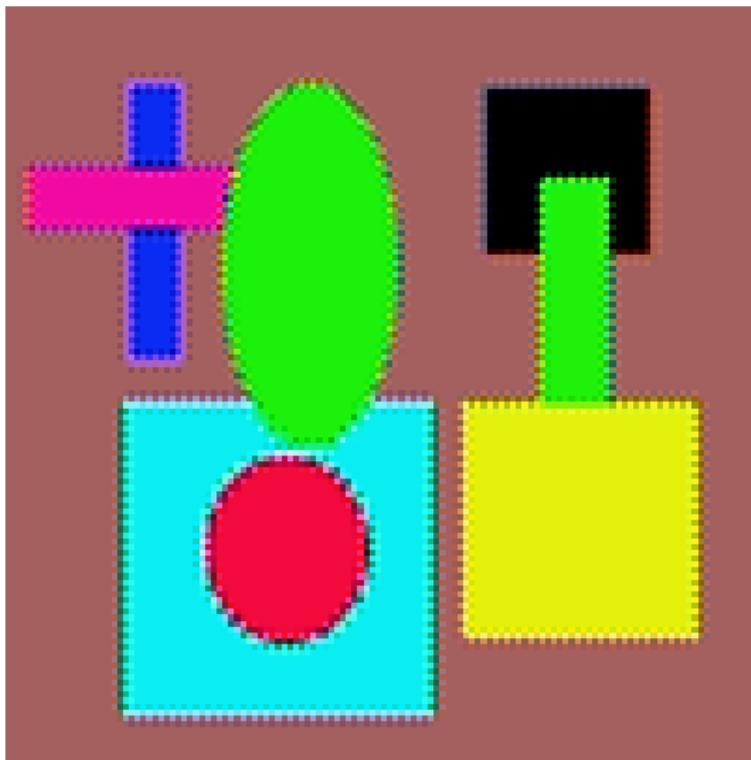
RESTAURO TRAMITE FILTRO DI FREEMAN

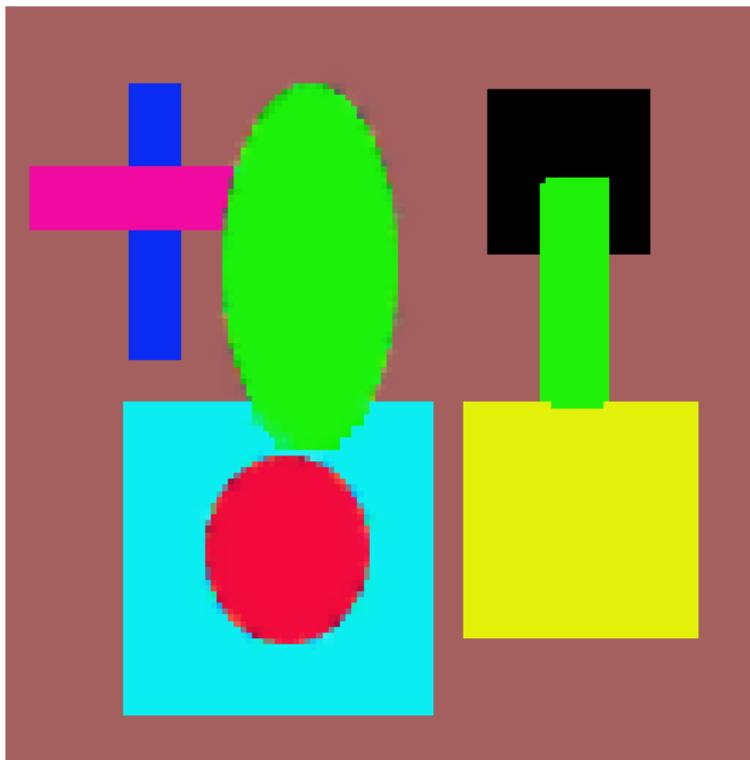


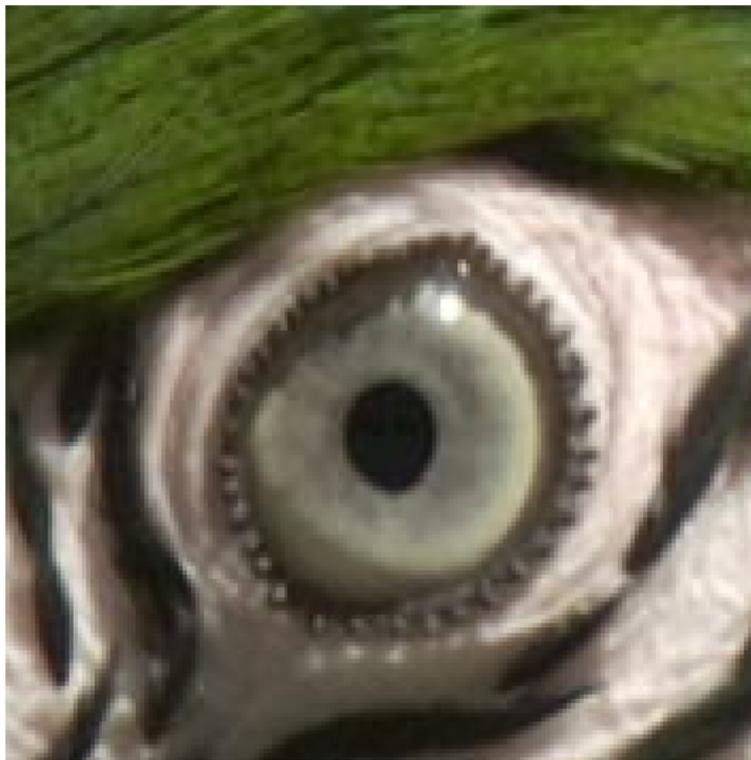
RESTAURO TRAMITE FILTRO DI LAROCHE-PRESCOTT

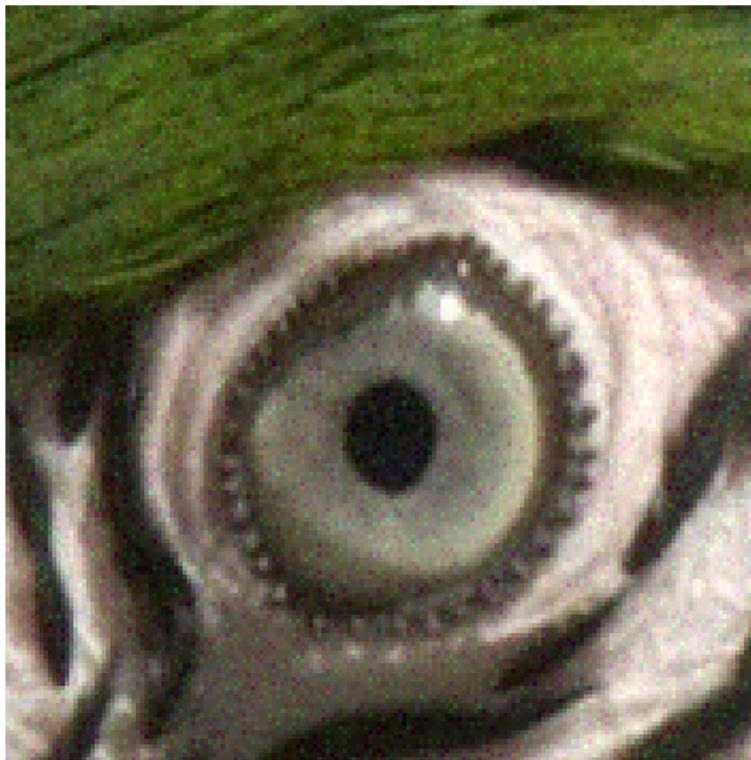


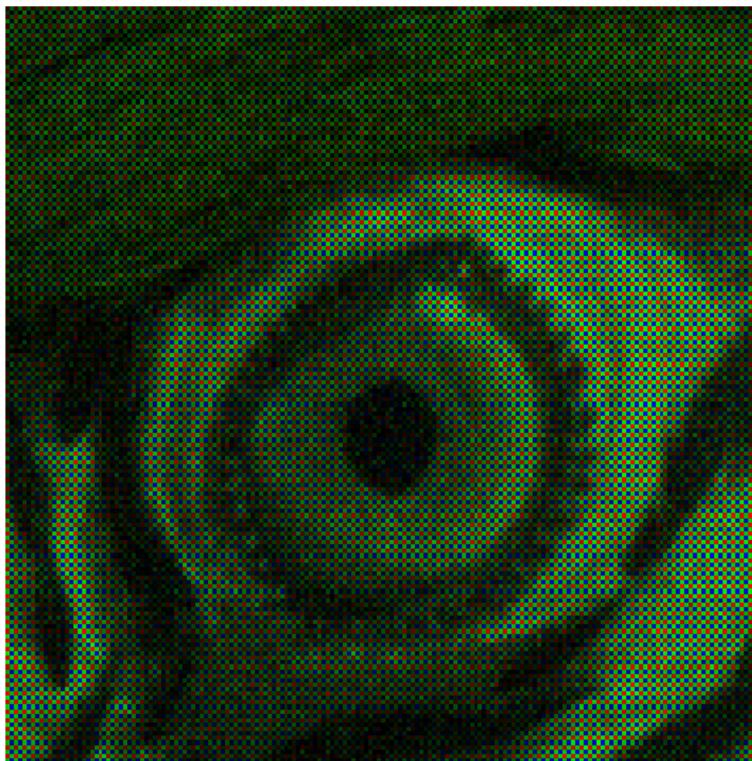
RESTAURO TRAMITE FILTRO DI MALVAR



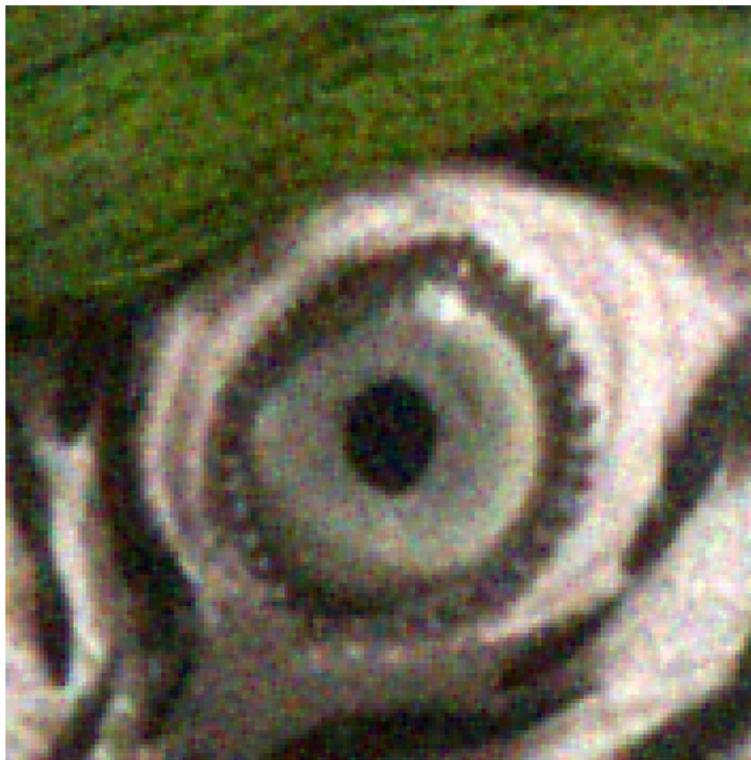








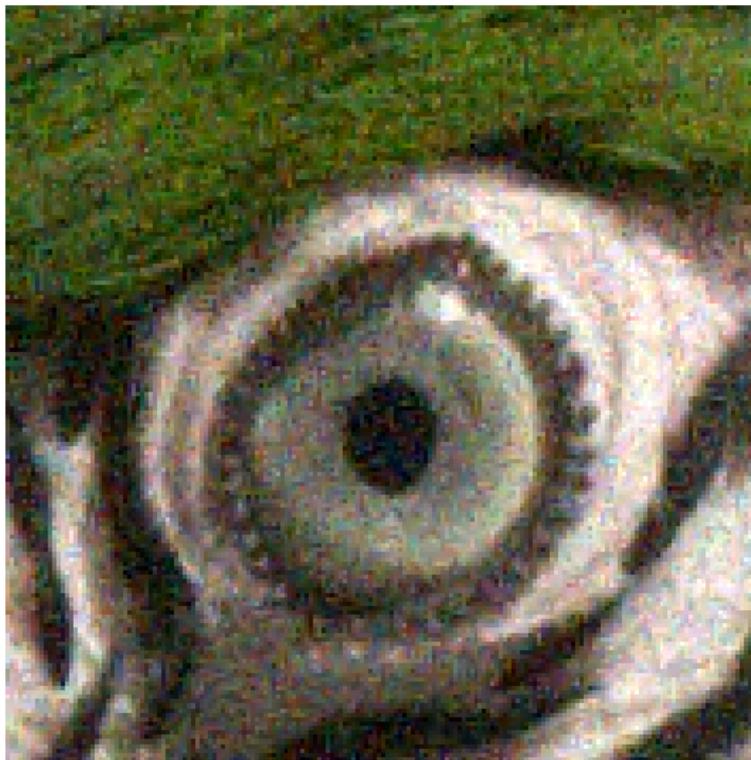
RESTAURO TRAMITE FILTRO BILINEARE



RESTAURO TRAMITE FILTRO DI FREEMAN

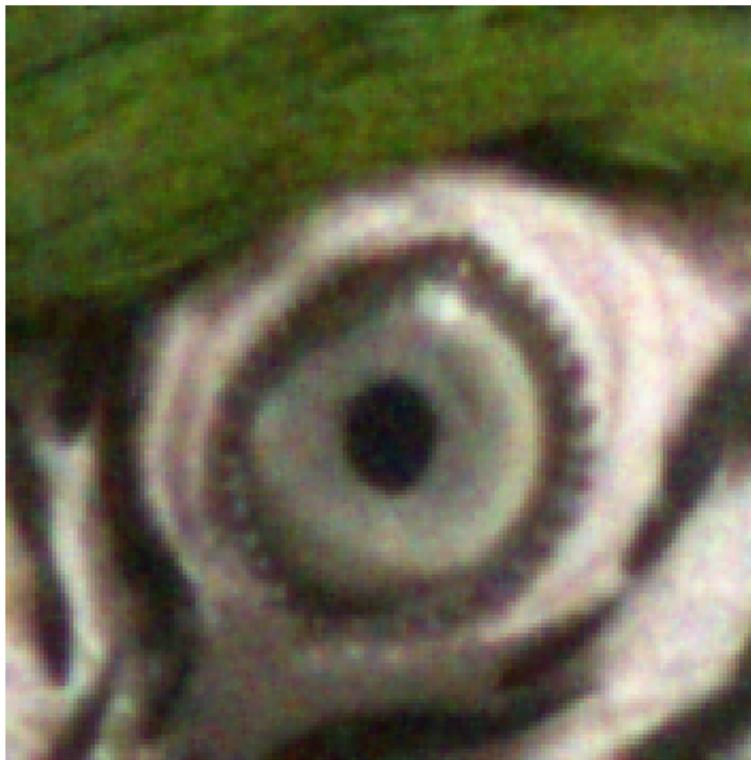


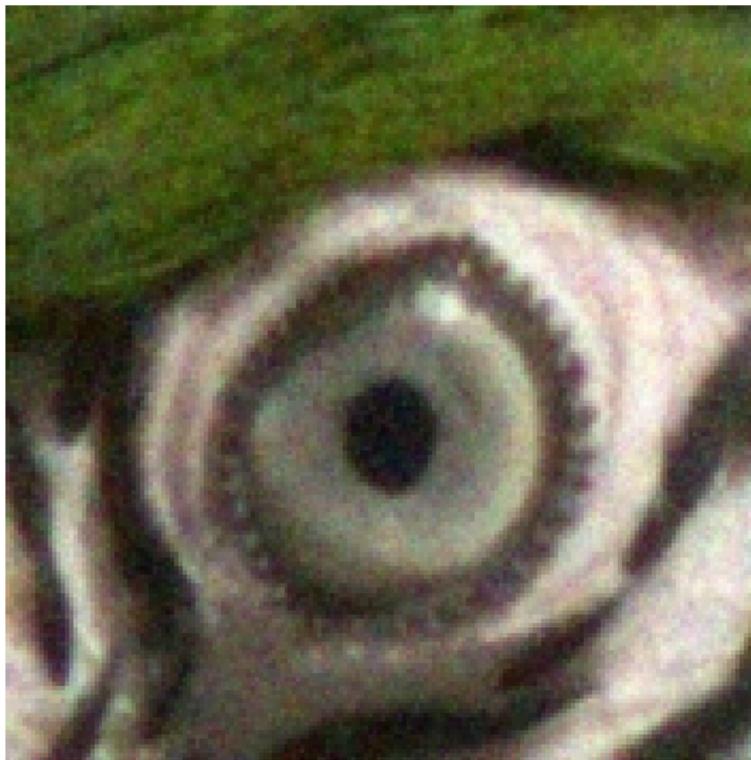
RESTAURO TRAMITE FILTRO DI LAROCHE-PRESCOTT

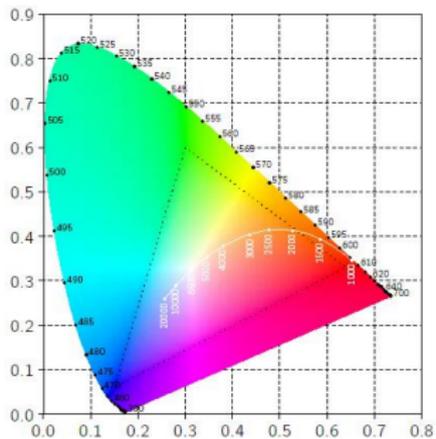


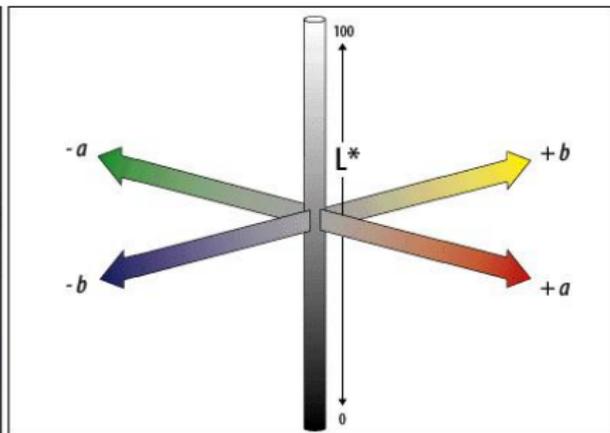
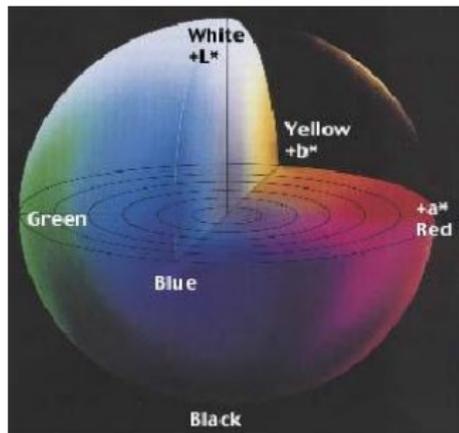
RESTAURO TRAMITE FILTRO DI MALVAR











FINE

