Facoltà di Ingegneria

Corsi di Laurea in Ingegneria Biomedica, Elettronica, Informatica, dell'Informazione

Algebra lineare e Geometria
18 giugno 2009

TEMA 1

1. In $\mathbb{R}^3$ con prodotto scalare canonico, si considerino i vettori
$$v_1 = (1,0,0), \quad v_2 = (-1,1,1), \quad v_3 = (1,1,1).$$
   a) I vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti?
   Si determini una base ortonormale dello spazio vettoriale $V = < v_1, v_2, v_3 >$.
   b) Si consideri l'endomorfismo L di $\mathbb{R}^3$ che al vettore $v = (x, y, z)$ associa
$$L(v) = (v \cdot v_1)v_1 + (v \cdot v_2)v_2 + (v \cdot v_3)v_3.$$
   Si determinino il nucleo e l'immagine di L e si scriva la matrice di L relativa alla base canonica. L è diagonalizzabile?
   c) Si determinino i vettori $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $L(v) = pr_V(v)$, dove $pr_V(v)$ indica la proiezione ortogonale di v su V.
   d) Si dica se esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice di L ad essa relativa sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Si consideri la matrice $S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ di $M_3(\mathbb{R})$.
   a) Si determinino due matrici ortogonali Q_1 e Q_2 tra loro distinte tali che $Q_1^{-1}SQ_1$ e $Q_2^{-1}SQ_2$ siano diagonali e inoltre $Q_1^{-1}SQ_1 = Q_2^{-1}SQ_2$.
   b) Si scomponga, se possibile, il vettore $(1, 0, 0)$ nella somma di due autovettori.
   Una scomposizione di questo tipo si può eseguire per ogni vettore non nullo di $\mathbb{R}^3$?
   c) Si consideri la forma quadratica F associata a S e si precisi se essa è definita positiva, indefinita, ecc.
   d) Indicato con α l'autovalore di S di molteplicità 1, si determinino gli autovettori (x_o, y_o, z_o) di S relativi ad α tali che $F(x_o, y_o, z_o) = 6$.

3. Fissato nello spazio un sistema di riferimento ortonormale, si considerino
   il piano $\pi : x - 2z + 1 = 0$ e i punti $A(0, 1, 3)$ e $B(3, 1, 2)$.
   a) Si calcolino le distanze di A da π e di A da B.
   b) Si determini la proiezione ortogonale H di A su π.
   c) Si determini il punto C per cui $AHBC$ è un quadrato.
   d) Si determini (sia in forma parametrica che in forma cartesiana) la retta t che passa per A, è parallela al piano π ed è ortogonale alla retta $r : \begin{cases} x = \rho \\ y = \rho \\ z = \rho \end{cases}$.

Facoltà di Ingegneria

Corsi di Laurea in Ingegneria Biomedica, Elettronica, Informatica, dell'Informazione

Algebra lineare e Geometria

18 giugno 2009

TEMA 2

1. In $I\!R^3$ con prodotto scalare canonico, si considerino i vettori

$$v_1 = (1,0,0), \quad v_2 = (-1,1,1), \quad v_3 = (1,1,1).$$

   a) Si consideri l'endomorfismo L di $I\!R^3$ definito da

   $$L(1,0,0) = v_1 - v_2 + v_3, \quad L(0,1,0) = v_2 + v_3, \quad L(0,0,1) = v_2 + v_3.$$

   Si scriva la matrice di L relativa alla base canonica. L è diagonalizzabile?
   Si determinino il nucleo e l'immagine di L e si dica se sono l'uno il complemento ortogonale dell'altro (in $I\!R^3$).

   b) Si dica se L coincide con l'endomorfismo g di $I\!R^3$ che al vettore $v = (x,y,z)$ associa $g(v) = (v \cdot v_1)v_1 + (v \cdot v_2)v_2 + (v \cdot v_3)v_3$.

   c) Si determinino i vettori $v = (x,y,z) \in I\!R^3$ tali che $L(v) = pr_N(v)$, dove $pr_N(v)$ indica la proiezione ortogonale di v sul nucleo N di L.

   d) Si dica se esiste una base $\mathcal{B}$ di $I\!R^3$ tale che la matrice di L ad essa relativa sia $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Si consideri la matrice $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ di $M_3(I\!R)$.

   a) Si determinino due matrici ortogonali Q_1 e Q_2 tali che
   $Q_1^{-1}SQ_1$ sia la matrice diagonale $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, con $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$, e
   $Q_2^{-1}SQ_2 = \operatorname{diag}(\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3)$, con $\lambda'_1 \leq \lambda'_2 \leq \lambda'_3$.

   b) Si scomponga, se possibile, il vettore $(1,0,0)$ nella somma di due autovettori.
   Una scomposizione di questo tipo si può eseguire per ogni vettore non nullo di $I\!R^3$?

   c) Si consideri la forma quadratica F associata a S e si precisi se essa è definita positiva, indefinita, ecc.

   d) Indicato con α l'autovalore di S di molteplicità 1, si determinino gli autovettori (x_o, y_o, z_o) di S relativi ad α tali che $F(x_o, y_o, z_o) = 9$.

3. Fissato nello spazio un sistema di riferimento ortonormale, si considerino
   la retta $r : \begin{cases} x - 2z + 1 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$ e i punti $A(0,-1,3)$ e $B(3,-1,2)$.

   a) Si calcolino le distanze di A da r e di A da B.

   b) Si determini la proiezione ortogonale H di A su r.

   c) Si determini il punto C per cui $AHBC$ è un quadrato.

   d) Si determini (sia in forma parametrica che in forma cartesiana) la retta t che passa per A, è ortogonale alla retta r ed è parallela al piano $\pi : x + y + z + 1 = 0$.

Facoltà di Ingegneria

Corsi di Laurea in Ingegneria Biomedica, Elettronica, Informatica, dell'Informazione

Algebra lineare e Geometria
18 giugno 2009

TEMA 3

1. In $I\!R^3$ con prodotto scalare canonico, si considerino i vettori

$$v_1 = (1,1,1), \quad v_2 = (0,2,0), \quad v_3 = (1,-1,1).$$

   a) Si consideri l'endomorfismo L di $I\!R^3$ definito da

   $$L(1,0,0) = v_1 + v_3, \quad L(0,1,0) = v_1 + 2v_2 - v_3, \quad L(0,0,1) = v_1 + v_3.$$

   Si scriva la matrice di L relativa alla base canonica. L è diagonalizzabile?
   Si determinino il nucleo e l'immagine di L e si dica se sono l'uno il complemento ortogonale dell'altro (in $I\!R^3$).

   b) Si dica se L coincide con l'endomorfismo g di $I\!R^3$ che al vettore $v = (x,y,z)$ associa $g(v) = (v \cdot v_1)v_1 + (v \cdot v_2)v_2 + (v \cdot v_3)v_3$.

   c) Si determinino i vettori $v = (x,y,z) \in I\!R^3$ tali che $L(v) = pr_N(v)$, dove $pr_N(v)$ indica la proiezione ortogonale di v sul nucleo N di L.

   d) Si dica se esiste una base $\mathcal{B}$ di $I\!R^3$ tale che la matrice di L ad essa relativa sia $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Si consideri la matrice $S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ di $M_3(I\!R)$.

   a) Si determinino due matrici ortogonali Q_1 e Q_2 tali che
   $Q_1^{-1}SQ_1$ sia la matrice diagonale $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, con $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$, e
   $Q_2^{-1}SQ_2 = \operatorname{diag}(\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3)$, con $\lambda'_1 \leq \lambda'_2 \leq \lambda'_3$.

   b) Si scomponga, se possibile, il vettore $(1,0,0)$ nella somma di due autovettori.
   Una scomposizione di questo tipo si può eseguire per ogni vettore non nullo di $I\!R^3$?

   c) Si consideri la forma quadratica F associata a S e si precisi se essa è definita positiva, indefinita, ecc.

   d) Indicato con α l'autovalore di S di molteplicità 1, si determinino gli autovettori (x_o, y_o, z_o) di S relativi ad α tali che $F(x_o, y_o, z_o) = 1$.

3. Fissato nello spazio un sistema di riferimento ortonormale, si considerino
   la retta $r : \begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ e i punti $A(-2,2,3)$ e $B(1,2,2)$.

   a) Si calcolino le distanze di A da r e di A da B.

   b) Si determini la proiezione ortogonale H di A su r.

   c) Si determini il punto C per cui $AHBC$ è un quadrato.

   d) Si determini (sia in forma parametrica che in forma cartesiana) la retta t che passa per A, è ortogonale alla retta r ed è parallela al piano $\pi : x + y + z - 1 = 0$.

Facoltà di Ingegneria

Corsi di Laurea in Ingegneria Biomedica, Elettronica, Informatica, dell'Informazione

Algebra lineare e Geometria

18 giugno 2009

TEMA 4

1. In $\mathbb{R}^3$ con prodotto scalare canonico, si considerino i vettori
$$v_1 = (1,1,1), \quad v_2 = (0,2,0), \quad v_3 = (1,-1,1).$$
   a) I vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti?
   Si determini una base ortonormale dello spazio vettoriale $V =< v_1, v_2, v_3 >$.
   b) Si consideri l'endomorfismo L di $\mathbb{R}^3$ che al vettore $v = (x, y, z)$ associa
   $$L(v) = (v \cdot v_1)v_1 + (v \cdot v_2)v_2 + (v \cdot v_3)v_3.$$
   Si determinino il nucleo e l'immagine di L e si scriva la matrice di L relativa alla base canonica. L è diagonalizzabile?
   c) Si determinino i vettori $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $L(v) = pr_V(v)$, dove $pr_V(v)$ indica la proiezione ortogonale di v su V.
   d) Si dica se esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice di L ad essa relativa sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Si consideri la matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ di $M_3(\mathbb{R})$.
   a) Si determinino due matrici ortogonali Q_1 e Q_2 tra loro distinte tali che $Q_1^{-1}SQ_1$ e $Q_2^{-1}SQ_2$ siano diagonali e inoltre $Q_1^{-1}SQ_1 = Q_2^{-1}SQ_2$.
   b) Si scomponga, se possibile, il vettore $(1, 0, 0)$ nella somma di due autovettori.
   Una scomposizione di questo tipo si può eseguire per ogni vettore non nullo di $\mathbb{R}^3$?
   c) Si consideri la forma quadratica F associata a S e si precisi se essa è definita positiva, indefinita, ecc.
   d) Indicato con α l'autovalore di S di molteplicità 1, si determinino gli autovettori (x_o, y_o, z_o) di S relativi ad α tali che $F(x_o, y_o, z_o) = 4$.

3. Fissato nello spazio un sistema di riferimento ortonormale, si considerino
   il piano $\pi : x - 2z = 4$ e i punti $A(1, 1, 1)$ e $B(4, 1, 0)$.
   a) Si calcolino le distanze di A da π e di A da B.
   b) Si determini la proiezione ortogonale H di A su π.
   c) Si determini il punto C per cui $AHBC$ è un quadrato.
   d) Si determini (sia in forma parametrica che in forma cartesiana) la retta t che passa per A, è parallela al piano π ed è ortogonale alla retta $r : \begin{cases} x = \rho + 1 \\ y = \rho \\ z = \rho \end{cases}$.