# ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA - canale 4
a.a. 2008-2009

## 10a settimana
4.5-8.5.2009
(*pp. 181-195 + 209-231*)

Riprendiamo il concetto di funzione di più variabili.

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: si tratta di *una* funzione di $n$ variabili $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: prende un vettore di $n$ componenti e lo manda in un numero (reale).

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ (si dice "funzione a valori vettoriali"): si tratta di un insieme di $k$ funzioni $f_1, f_2, \ldots, f_k$, ciascuna di $n$ variabili $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: prende un vettore di $n$ componenti e lo manda in un vettore di $k$ componenti.

Se tutte queste funzioni fossero lineari, è qualcosa che conosciamo già: tale funzione è caratterizzata da una matrice di $k$ righe ed $n$ colonne.

Quando su $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}^k$ abbiamo istituito la norma euclidea (la radice quadrata della somma dei quadrati delle componenti) abbiamo istituito il concetto di distanza: la norma di un vettore è la sua distanza dal vettore nullo, la distanza tra due vettori è la distanza tra i punti (cioè, alla buona: tra gli estremi delle freccine che li individuano).
La distanza tra due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x_0}$ è la norma $||\mathbf{x} - \mathbf{x_0}||$.

Una volta istituito il concetto di distanza, è chiaro cosa significhi *intorno (o sfera) di raggio* $\varepsilon$ (o di raggio $\delta$) di un vettore $\mathbf{x_0}$: è l'insieme di quei vettori

$\mathbf{x}$ tali che $||\mathbf{x}-\mathbf{x_0}|| < \varepsilon$; è chiaro quindi cosa significhi che due vettori distano tra loro meno di $\varepsilon$: il punto che individua uno dei due vettori sta nella sfera di centro il punto che individua l'altro e di raggio $\varepsilon$.

Punto di accumulazione per un insieme: se ogni sfera di centro il punto contiene infiniti punti dell'insieme

Punto interno: se esiste un suo intorno tutto costituito di punti dell'insieme

Punto esterno: se esiste un suo intorno che non contiene nessun punto dell'insieme

Punto di accumulazione: se ogni suo intorno contiene infiniti punti dell'insieme

Punto di frontiera: se ogni suo intorno

contiene punti dell'insieme e punti non dell'insieme

Insieme aperto: se formato solo da punti interni

Insieme chiuso: se contiene la sua frontiera (o, equivalentemente, contiene tutti i suoi punti di accumulazione)

Insieme limitato: se è tutto contenuto in una sfera

Insieme compatto: se è chiuso e limitato

Teorema di Bolzano-Weierstrass: ogni sottoinsieme limitato e infinito di $\mathbb{R}^n$ ammette un punto di accumulazione (che non è detto che appartenga all'insieme); se tale sottoinsieme è chiuso, allora contiene almeno un punto di accumulazione.

La definizione di limite $\ell$ (che è un vettore!) per una funzione da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^k$ è assolutamente uguale a quella per una variabile: fissato $\varepsilon$ esiste un $\delta$ tale che per $0 < ||\mathbf{x} - \mathbf{x_0}|| < \delta$ risulti $||\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \ell|| < \varepsilon$

Attenzione: non ha più senso parlare di limite destro e sinistro.

Della proposizione 17.4 è importante la seconda proprietà: ogni successione limitata di $\mathbb{R}^n$ ha una sottosuccessione convergente. C'è sotto un principio molto grosso (assioma della scelta o postulato di Zermelo).

La definizione di continuità in $\mathbf{x_0}$ è la solita:
c'è il limite e coincide con $\mathbf{f}(\mathbf{x_0})$.

Vale ancora che la composta di funzioni continue è continua (sempre che gli insiemi di definizione delle due funzioni componenti siano tali che abbia senso parlare di funzione composta).

Una funzione da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^k$ è continua se e solo se sono continue tutte le funzioni $f_k$ che la costituiscono.

Per una funzione *numerica* di più variabili vale il teor. di Weierstrass (non ha senso per una funzione a valori vettoriali).

*Si saltano tutti gli esempi ed esercizi, salvo quelli assolutamente banali.*

Definizione di derivata parziale per funzioni *numeriche* (solo per le funzioni di due variabili) (*p. 193-195*)

*Il §18 verrà fatto nelle esercitazioni.*

## Spazi affini

Ricordiamo che ad insiemi di punti $S^2$, $S^3$ abbiamo fatto corrispondere spazi vettoriali nei quali valessero le proprietà che la corrispondenza tra punti e vettori fosse biiettiva, e che la somma tra vettori AB+BC+CA fosse il vettore nullo.

Un insieme di punti $S$ a cui è associato uno spazio vettoriale $V$ come sopra si dice "varietà (o spazio) affine".
Attenzione: uno "spazio affine" in generale *non* è uno spazio vettoriale, ma gli

è stato associato uno spazio vettoriale. Ovviamente invece se si ha uno spazio vettoriale questo è già una varietà affine.

Un sistema di riferimento è costituito da un punto O della varietà affine $S$ e da un sistema di riferimento (cioè una base) dello spazio $V$ che gli è stato associato.
Definizione di coordinate in $S$: data la base $v_1, v_2, \ldots,\ v_n$ di $V$, si dice che $P$ ha coordinate $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se

$$OP = x_1 v_1 + \ldots x_n v_n.$$

In tale modo, se P ha le coordinate $x_i$ e Q ha le coordinate $y_i$ rispetto ad una certa base, il vettore PQ ha le coordinate $(\{x_i - y_i\}_{1=1,2,\ldots,n})$ rispetto alla stessa base.

Sistemi di riferimento diversi.

Prendiamo $S^2$ con due sistemi di rife-

rimento: $O$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $O'$, $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, e il punto $P$ abbia le coordinate $(x, y)$ nel primo sistema e $(x', y')$ nel secondo sistema, e poi siano $(o_1, o_2)$ le coordinate di $O'$ nel primo sistema. Allora il cambiamento si esprime così:
$xi + yj = OP = OO' + O'P =$
$= o_1 i + o_2 j + x'i' + y'j'$

Siamo nei vettori liberi, e possiamo scrivere
$i' = a_{11} + a_{21} j$ e $j' = a_{12} i + a_{22} j$
e quindi troviamo le coordinate rispetto alla nuova base (p. 211)

Parallelismo tra sottospazi affini (p. 212)

Rette in $S^2$; parametri direttori (componenti di un vettore parallelo)

Parallelismo tra rette; allineamento di punti (p. 214-215).

Fascio di rette; fascio improprio di rette.

Esercizio 20.6

Piani e rette in $S^3$.

(*pp. 218-222)*

Equazioni del piano parametriche e cartesiane. Spazio direttore, complanarità di punti.

Parametri direttori diuna retta, sua rappresentazione cartesiana e sistemi di equazioni della retta.