ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
canale 4

2a settimana (seguito)

Ripresa dei concetti fondamentali sugli spazi $V^2$ e $V^3$
(*pp. 46-48*)

Ricordiamo la definizione di ”ortonormalità”.

Ricordiamo che è $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ e che il moltiplicare uno o l'altro vettore per uno scalara $s$ dà lo stesso risultato.

Notiamo che abbiamo scelto il sistema di riferimento

$$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$$

come sistema ortonormale e lo abbiamo scelto in modo che sia

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

Vediamo la proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto vettoriale

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$$

e quindi anche

$$(r\mathbf{u} + s\mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = r\mathbf{u} \wedge \mathbf{w} + s\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$$

Vediamo il **prodotto misto**

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$$

le cui operazioni si possono svolgere in un modo solo.

Ricordiamo ancora che il prodotto scalare tra due qualunque dei tre versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vale 0.

## Lo spazio $R^n$

$n$-ple di numeri reali e loro somma, moltiplicazione per uno scalare $s$

Combinazioni lineari e loro coefficienti.

Come ci si accorge se una terna è combinazione lineare di altre? ad esempio di altre 2?

*Problema*: la terna (0,0,7) è combinazione di (3,2,7) e di (2,3,5)?

Dovrebbe succedere che ciascuna componente sia combinazione lineare delle rispettive componenti:

$$\begin{cases} r3 + s2 = 0 \\ r2 + s3 = 0 \\ r7 + s5 = 7 \end{cases}$$

Chiaramente non c'è nessuna soluzione:
le prime due equazioni hanno solo la soluzione (0,0) che non soddisfa la terza.

*Problema*: la terna (2,3,-1) è combinazione di (3,2,7) e di (7,3,22)?
Sì: la seconda terna moltiplicata per 3 meno la terza dà la prima.

Capitolo II - **Algebra lineare**

Somma di vettori di $\mathbb{R}^3$ e moltiplicazione per uno scalare (significa moltiplicare ogni singola componente).
Vettore nullo (= $n$-pla composta di tutti zeri). Definizione di $R^X$, mentre $R^\emptyset$ è composto da un punto solo (e le operazioni

applicabili soltanto a quell'elemento danno tutte come risultato quell'elemento).

Scrittura delle terne come righe o come colonne verticali (*pagg. 51-52*)

Base canonica.

In una ennupla alcuni elementi si possono ripetere (quindi non lo chiamiamo insieme, dove gli elementi sono tutti distinti tra loro); la ennupla è quindi una famgilia i cui elementi si contraddistinguono per l'indice (famiglia indiciata).

Prodotto scalare canonico (per $R^2$ ed $R^3$ è la stessa cosa che abbiamo definito per i vettori, ma non lo dimostriamo):

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Ortogonalità.

commutatività, distributività;

(pseudo)associatività.

Si noti che facendo il prodotto scalare di un vettore (non nullo) per sé stesso si ottiene una somma di quadrati non nulli e quindi una quantità sempre positiva.

Definizione di **norma**

La base canonica è ortonormale, ovviamente ve ne sono altre.
Per rendere un vettore normale, basta dividerlo per la sua norma.

Concetto di limite in uno spazio dotato di norma (*p. 55*).