# ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA - canale 4
a.a. 2008-2009

## 3a settimana
9.3 - 13.3.2009

(*pp. 55-91*)

Riprendiamo il concetto di norma e di convergenza in uno spazio dotato di norma.

Dato uno spazio **V** dotato di prodotto scalare (sui reali o complessi), su di esso è "indotta" una norma, cioè una funzione da V in $\mathbb{R}_0^+$ (cioè i reali non negativi) che gode delle seguenti proprietà:
- è nulla se e solo se il vettore è quello nullo,
- $||r\mathbf{u}|| = |r|||\mathbf{u}||$
$- ||\mathbf{u} + \mathbf{v}|| \leq ||\mathbf{u}|| + ||\mathbf{v}||$
(quest'ultima proprietà non la dimostria-

mo).

Uno spazio che è dotato di norma si dice "normato".

Dato uno spazio vettoriale normato, si dice che una successione di ennuple $\mathbf{v_k}$ *tende* alla ennupla $\mathbf{v}$ se la norma $||\mathbf{v_k} - \mathbf{v}||$ tende a 0.
Attenzione: qui ci conviene usare due indici $v_{ik}$ dove il primo indice indica la componente di $\mathbf{v_k}$, mentre il secondo indica l'elemento della successione.

Dire che quella norma tende a 0 significa dire che ognuno dei quadrati che costituiscono la norma tende a 0, e quindi che $\forall i,\ |x_{ik} - x_i| \to 0$ per $k \to +\infty$.

Ovviamente, dato che si è data la definizione di limite, si può dare anche la definizione di continuità di una funzione
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
in un punto (cioè un vettore) di $\mathbb{R}^n$:
è continua se (e solo se) sono continue tutte le sue componenti.

# Algebra lineare

## Spazi vettoriali

Un insieme (non vuoto) si dice "spazio vettoriale" se
- è dotato di un'operazione interna, associativa, commutativa e con elemento neutro (l'operazione viene indicata col segno "+")
- è dotato di un'operazione (infelicemente detta) esterna (prodotto per uno scalare) che sia associativa, distributiva rispetto alla somma, e tale che $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Si dice "sottospazio nullo" quello costituito dal vettore nullo $\mathbf{0_V}$ (ennupla con tutti gli elementi nulli).

Ovviamente moltiplicando il vettore nullo per un qualsiasi scalare si ottiene nuovamente il vettore nullo, moltiplicando un vettore qualsiasi per il numero 0 degli scalari, si ottiene il vettore nullo. Le operazioni si indicano col + e col -, ovviamente con significati diversi a seconda se siamo tra numeri o tra vettori, ma le regole di uso di questi segni sono quelle usuali dell'algebra.

Proposizione 5.2.
Date due combinazioni lineari (diverse) della stessa k-upla di vettori, che danno due vettori diversi $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, allora se una è determinata in modo unico, anche l'altra lo è.
(cioè: se c'è un modo unico per scrivere un vettore tramite quei vettori $\mathbf{v_i}$, allora anche qualsiasi altro si può scrivere in un modo solo tramite quei vettori).
Dim. - Infatti se il vettore $\mathbf{v}$ si potesse

scrivere in due modi, si potrebbe scrivere in due modi il vettore nullo, e quindi anche il vettore **w**.

Ciò equivale a dire che, se un vettore si può scrivere in un modo solo tramite la stessa famiglia indiciata di vettori, anche il vettore nullo si può scrivere in un modo solo (che è la combinazione lineare con tutti i coefficienti nulli).

Ad una qualsiasi famiglia indiciata di vettori si può aggiungere il vettore nullo come combinazione lineare di elementi della famiglia: basta prendere la combinazione lineare a coefficienti tutti nulli, quindi il vettore nullo si può sempre esprimere come combinazione lineare di una qualsiasi famiglia di vettori.

*Indipendenza lineare* di una famiglia

di vettori: se il vettore nullo si può scrivere solo come combinazione lineare a coefficienti tutti nulli.

*Dipendenza lineare*: quando il vettore nullo si può scrivere in più modi (cioè anche tramite una combinazione a coefficienti non tutti nulli).

Fare con cura gli esercizi 5.5.

Generatori dello spazio: una famiglia tale che tutti i vettori dello spazio si possono ottenere tramite una combinazione lineare dei vettori della famiglia.

Fare bene gli esercizi 5.7.

**Base**: famiglia di vettori linearmente indipendenti e generatori.

Lemma dello scambio:
Se una k-pla è una famiglia di generatori e si prende un vettore $\mathbf{v}$ generato (quindi uguale a una sua combinazione lineare), con $r_1 \neq 0$, allora si può sostituire $\mathbf{v}_1$ con $\mathbf{v}$ e si ottiene ancora una famiglia di generatori.
(abbiamo scambiato $\mathbf{v}_1$ con $\mathbf{v}$).

Teorema dello scambio:
Se $\mathbf{w}_i$ è una famiglia di $m$ vettori indipendenti e $\mathbf{v}_j$ una famiglia di $k$ generatori, allora $m \leq k$.

In conclusione: i generatori sono sempre in numero non inferiore al numero dei vettori linearmente indipendenti.

Basi di $\mathbb{R}^n$ e base canonica: è costituita da vettori linearmente indipendenti che costituiscono una famiglia di generatori.
Se una base ha $n$ vettori, tutte le basi hanno $n$ vettori.

Si dice **dimensione** di uno spazio il numero di vettori di una sua base; se questa famiglia è finita, lo spazio si dice "finitamente generato".

Teor. 5.14 (fondamentale)

Esercizi 5.15

**Sottospazio**: contiene tutte le combinazioni lineari dei propri vettori.
In particolare ogni sottospazio deve contenere la ennupla nulla (ciò non è sufficiente, è solo necessario).

Un sottospazio di uno spazio vettoriale è uno spazio vettoriale a sua volta.
Se uno spazio vettoriale ha un numero finito di generatori, qualsiasi suo sottospazio ha un numero finito di generatori.

La dimensione di un sottospazio è $\leq$ della dimensione dello spazio.