ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
canale 4

3a settimana (seguito)

Prendiamo un sottoinsieme $S \subseteq V$ e consideriamone tutte le combinazioni lineari; questo nuovo insieme è un sottospazio di V (c'è sempre la combinazione lineare nulla) e viene indicato con

$$< S > .$$

Se U è un sottospazio proprio di V, allora esiste una base di V che non contiene elementi di U.
Infatti basta prendere un vettore $\mathbf{v} \in V$ che non sta in U e aggiungerci gli elementi della base di U: questi vettori così creati non stanno in U (se ci stessero, dato che U è un sottospazio, ci starebbe anche la combinazione lineare con tutti i coefficienti nulli salvo

quello di $\mathbf{v}$ e quindi ci starebbe anche $\mathbf{v}$). Prendiamo tutte le combinazioni lineari di tutti questi: se queste occupano tutto V abbiamo dimostrato; se non lo occupano prendiamo un altro vettore che non sta in $\mathbf{v} + \mathbf{U}$ e ripetiamo il ragionamento.

Perché se $\mathbf{v} + \mathbf{U}$ è un sottospazio, allora $\mathbf{v} + \mathbf{U} = \mathbf{U}$?
Perché se è un sottospazio deve avere anche lo 0, e allora $\mathbf{v}$ deve essere una combinazione lineare degli elementi di $\mathbf{U}$.

Perché se $\mathbf{U} \cup \mathbf{V}$ è un sottospazio, allora uno è contenuto nell'altro?
Se così non fosse, ci sarebbero elementi di uno dei due che non sono esprimibili tramite una base dell'altro, e allora

cadremmo nel caso precedente.

Consideriamo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$: scriviamone l'immagine componente per componente, quindi sarà comodo studiare k funzioni di $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Definizione di funzione lineare (oppure "omomorfismo")
$L : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ si dice **lineare** se vale

$$L(r\mathbf{u} + s\mathbf{v}) = rL(\mathbf{u}) + sL(\mathbf{v})$$

(cioè una funzione che mantiene nello spazio di arrivo le combinazioni lineari con gli stessi coefficienti, oppure tale che le immagini di combinazioni lineari (con certi coefficienti) sono combinazioni lineari delle immagini (con gli *stessi* coefficienti).

Ovviamente il vettore nullo va nel vettore nullo.

La proiezione di uno spazio su un suo sottospazio è lineare (ad esempio se la proiezione manda nello 0 la prima componente, manda nello 0 anche tutte le possibili combinazioni lineari delle prime componenti).

ATTENZIONE: la funzione $x \rightarrow x^2$ *non* è lineare (il quadrato della somma non è la somma dei quadrati).

Del pari la funzione *seno*.

Se esprimiamo un vettore (cioè una n-pla di numeri $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$) tramite una combinazione lineare con coefficienti r_i della base di $\mathbb{R}^n$, allora se L è una funzione lineare risulta

$$L((x_1, x_2, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i$$

che è un polinomio omogeneo di primo grado.

Ovviamente, se una funzione è lineare, lo sono le singole componenti che vengono espresse con un vettore colonna.

Se vogliamo scrivere una funzione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la possiamo scrivere come un vettore in riga per un vettore in colonna, e il risultato è ovviamente un numero reale.

Se vogliamo scrivere una funzione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ allora ci conviene scrivere due righe per una colonna, e il risultato, che è un vettore di due componenti, cioè una coppia di numeri reali, lo scriveremo in due righe.

Proviamo a scrivere una funzione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; avrò come risultato una tabella fatta di due righe (perché sono andato in $\mathbb{R}^2$).

Definizione di **matrice** $k \times n$: una tabella di k righe ed n colonne.
Esempi: matrici e nomi degli elementi (coefficienti) (*p. 81*).

Ma possiamo anche scrivere ognuno dei vettori che sono risultati come a sua volta una combinazione lineare dei vettori della base.

Riprendiamo la funzione lineare L; l'immagine $L(x)$ ha k componenti, quindi ogni componente è l'immagine di una certa funzione $L_i(x)$.

Riprendendo in mano le matrici:
le singole colonne sono le immagini $L(e_i)$ dei singoli elementi della base (ciascuna immagine ha n componenti);
le righe invece indicano le componenti i-esime delle singole $L(e_i)$.

Una funzione lineare L gode di proprietà interessanti,
Sono equivalenti tra loro:
1) L trasforma famiglie di vettori linearmente indipendenti in famiglie di vettori linearmente indipendenti;
2) la controimmagine del vettore nullo è il vettore nullo;
3) L è iniettiva.
(che da 2 segua 3 lo abbiamo già visto).

ATTENZIONE: queste proprietà *non* sono caratteristiche di una funzione lineare; una funzione lineare può non godere di queste proprietà, ma se gode di una gode anche delle altre.

Ad esempio: una proiezone è lineare, ma non è iniettiva.