ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA - canale 4
a.a. 2008-2009

4a settimana
16.3 - 20.3.2009
(*pp.81-99*)

Riprendiamo il concetto di **matrice**: si tratta di una tabella i cui elementi sidicono anche *coefficienti*.Ricordiamo che una matrice $k \times n$ esprime tutto quello che serve per identificare una funzione lineare da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^k$.

Ogni riga (ad es. la i-esime) indica quella funzione delle variabili in $\mathbb{R}^n$ che determina la i-esima componente dell'immagine in $\mathbb{R}^k$ del vettore di partenza; siccome il vettore di partenza si può scrivere come combinazione lineare (con certi coefficienti) dei vettori della base, i coefficienti della matrice indicano i coefficienti delle immagini dei versori della base canonica.

Dire quale funzione lineare identifica la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Due righe, quindi si va in $\mathbb{R}^2$; tre colonne quindi si parte da $\mathbb{R}^3$.
La prima colonna ci dice che il versore $\vec{\imath}$ va nel vettore

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La seconda ci dice che $\vec{\jmath}$ va in

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

La terza colonna ci dice che il versore $\vec{k}$ va nel vettore

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dove va il vettore $4, 6, -2$?
Calcolo a mano: va in

$$\begin{pmatrix} 50 \\ 58 \end{pmatrix}$$

Il vettore nullo va nel vettore nullo, e quindi vettori linearmente dipendenti vanno in vettori linearmente dipendenti.

È vero anche il viceversa? No; se l'immagine è una famiglia di vettori linearmente dipendenti non è detto che i vettori di partenza lo fossero (ricordare le proiezioni su una o l'altra componente).

Una funzione lineare, se è iniettiva, allora trasforma famiglie linearmente indipendenti in famiglie linearmente indipendenti e viceversa, e quindi la controimmagine del vettore nullo è (soltanto) il vettore nullo.
Può non essere iniettiva, e allora il rango cala (cioè il sottospazio costituito dall'immagine ha dimensione minore di quella dello spazio di partenza).
Verificare che questo succede con la funzione identificata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Altri esercizi con matrici 3×2 e 2×4.

Definizione di **nucleo** (il nucleo delle proiezini l'abbiamo già visto).

Se una funzione è lineare, l'immagine di un sottospazio è un sottospazio, e la controimmagine di un sottospazio è un sottospazio.

Quando due vettori hanno la stessa immagine?
Quando differiscono per un vettore che sta nel nucleo.

Teorema delle dimensioni.
Se ho uno spazio finitamente generato allora la sua dimensione è la somma delle dimensioni della sua immagine e del nucleo.
La dim. prevede di prendere una base dell'immagine e poi dei vettori di V tali che le immagini di k di questi siano proprio quella base. Quindi si prende una base del nucleo.

Il tutto consiste nel dimostrare che l'insieme di questi vettori è una base (dapprima si dimostra che sono indipendenti, e poi che generano).

Data una base di n vettori ed altri n vettori qualsiansi, esiste una sola funzione lineare che manda la base in questi ultimi.