ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA - canale 4
a.a. 2008-2009

Le matrici $M_{k\times n}$ come spazio vettoriale
(*pp. 92-99*)

Le matrici E_{ij} come base dello spazio di dimensione $k \times n$.

La funzione composta

$$R^m \to R^n \to R^k$$

si esprime tramite una matrice che esprime la composizione di una funzione L_A (che corrisponde alla matrice A) e di una L_B (che corrisponde alla matrice B):
la L_A va da $R^n \to R^k$
la L_B va da $R^m \to R^n$
Allora la funzione da $R^m \to R^k$

è espressa tramite una matrice corrispondente a $L_A \circ L_B$.

Tale matrice è quella che si ottiene con il prodotto "righe per colonne" $A \times B$ così definito:

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \ldots a_{1n}b_{n2} & \ldots & a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \ldots a_{1n}b_{nm} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \ldots a_{2n}b_{n1} & \ldots & \ldots & a_{21}b_{1m} + \ldots a_{2n}b_{nm} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1}b_{11} + a_{k2}b_{21} + \ldots a_{kn}b_{n1} & \ldots & \ldots & a_{k1}b_{1m} + \ldots a_{kn}b_{nm} \end{pmatrix}$$

Vediamo un esempio (es. **8.2**)

può succedere che esista AB senza che esista BA (basta che i numeri delle righe e delle colonne non si combinino!)

Endomorfismi: le matrici sono quadrate!
$n \times n$: quadrate di **ordine** n

Matrice identica

Matrice nulla e matrici che sono divisori dello 0:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sono divisori dello 0 pur non essendo la matrice nulla.

Diagonale di una matrice A: l'insieme degli elementi a_{ii}.

La matrice può non essere quadrata.
Se A è quadrata e fuori della diagonale ha tutti zeri, si dice "matrice diagonale"; se inoltre ha gli elementi di tale diagonale tutti uguali, si dice "matrice scalare".

A si dice "matrice invertibile" se è

quadrata ed esiste un'altra matrice, che chiameremo A^{-1}, tale che il prodotto sia la matrice identica.

Ad esempio l'inversa della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

è la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(fare i calcoletti!)

Invece la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

non ha inversa (il sistema risulta impossibile).

Il prodotto di due matrici invertibili è invertibile.

Sottomatrici, minori (p. *98*)
Dipendenza tra vettori che non cambia se a uno si sostituisce una combinazione lineare di altri.

Rango di una famiglia di vettori è il numero di quelli indipendenti.
Esempio 9.1: si può vedere abbastanza facilmente che sono linearmente indipendenti.

Matrici a scala per righe:
se le righe tutte nulle sono in basso, e se il primo elemento non nullo di ogni riga è più a destra di quello della riga precedente.

Esempi (pp. *102-104*).

Ogni riga non nulla non può essere combinazione lineare di quelle che le stanno sotto.

Operazioni elementari: scambio di righe, combinazione lineare di righe o di colonne.

Data una qualsiasi matrice, questa si può trasformare in matrice diagonale tramite operazioni elementari. Si può anche ottenere che ogni elemento direttore si uguale a 1 (si opera sempre sulle righe superiori, quelle inferiori non vanno più toccate).

I risultati delle operazioni elementari sulle righe di una matrice A si possono ottenere moltiplicando A per altre matrici. Detta $H_{ij}(r)$ la matrice che differisce dalla matrice identica solo nel posto ij dove ha il numero r si ha che:

- mettere al posto della i-esima riga la somma della i-esima riga più la j-esima moltiplicata per r equivale a moltiplicare (a sinistra) per $H_{ij}(r)$

Se chiamiamo H_{ij} la matrice identica in cui abbiamo scambiato la riga i-esima con la j-esima (ovviamente $i \neq j$), allora

- scambiare la i-esima riga con la j-esima nella matrice A equivale a moltiplicare A (a sinistra) per H_{ij}.

Siccome la dipendenza si può vedere sia sulle righe che sulle colonne, il rango di una matrice di tipo $k \times n$ è il rango delle sue righe (cioè il numero delle righe che non sono combinazioni lineari di altre), oppure quello delle sue colonne.

Occupiamoci delle matrici quadrate (non nulle).

- A o è invertibile o è divisore dello 0.
- A è invertibile se e solo se il suo rango è n.
- A è invertibile se e solo se è il prodotto di matrici elementari.

Trucco per trovare l'inversa di una matrice invertibile (che è ovviamente quadrata) (p. *110*):
- si accosta (a sinistra) la matrice alla matrice identica
- si cerca con operazioni elementari di far diventare la matrice a forma canonica (cioè far diventare la parte di sinistra la matrice identica)
- la matrice che adesso è a destra è

l'inversa della matrice originaria.

Definizione di determinante di una matrice quadrata (1 x 1, 2 x 2, 3 x 3 ecc.)

Calcolo di alcuni determinanti.
Si nota che se le righe sono proporzionali o sono combinazioni lineari di altre righe, il determinante risulta 0.

det(AB)= det(A)det(B)
(niente dim.)

Una matrice è invertibile se e solo se il det è $\neq 0$.