ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA - canale 4
a.a. 2008-2009

6a settimana
30.3 - 6.4.2009
(*pp.118-138*)

Ripresa dei sistemi lineari e della loro presentazione tramite prodotto di una matrice per un vettore uguagliato ad un vettore.

Sistemi omogenei:
- matrice incompleta di tipo $m \times n$
- matrice completa di tipo $m \times (n+1)$.

Teorema di Rouché-Capelli:

AX=B

è risolubile se e solo se A e $A|B$ hanno lo stesso rango.
(*p. 121-122*)

Presentazione dell'enunciato in altro

modo:
B appartiene all'immagine di L_A, e quindi questo significa che B è una combinazione lineare delle colonne di A (le colonne di A generano l'immagine).

Visto in un altro modo:
se il sistema è risolubile, significa che il vettore B è una combinazione lineare delle colonne di A, e quindi il rango di A e di $A|B$ sono lo stesso.

Viceversa, se il rango è lo stesso vuol dire che esiste una n-pla di coefficienti tali che il vettore B è combinazione lineare secondo quei coefficienti dei vettori di A.

L'antiimmagine di B costituisce l'insieme delle soluzioni del sistema.

Sistema omogeneo associato:

le sue soluzioni costituiscono il nucleo di L_A.
Ma sappiamo che due vettori che siano mandati da L_A nello stesso vettore B differiscono per un elemento che sta nel nucleo. Quindi basta trovare il nucleo e poi aggiungerci un vettore $\mathbf{v}$ la cui immagine è B.
Se S è l'insieme dei vettori che sono soluzioni del sistema omogeneo associato (cioè N(L)), tutte le soluzioni sono del tipo $\mathbf{v}$+S.

L'insieme delle soluzioni è un sottospazio?
No, solo se il sistema è omogeneo.

Equivalenza di sistemi

Cerchiamo un sistema equivalente più

facile.
Dato AX=B, moltiplichiamo a destra per una matrice invertibile H (se si moltiplica per una non invertibile si possono trovare oltre alle soluzioni di quello di prima anche altre, e quindi l'utilità è relativa...). Si ottiene quindi HAX = HB.

Portiamo adesso in forma a scala per righe l'intera matrice completa, quindi quella $HAX|HB$; il sistema diventa più facile.
Supponiamo che sia di rango r e con n indeterminate: sotto ci sono righe di zeri, poi venendo dal basso ci sarà una riga con un termine direttore diverso da 0. Si possono dare valori qualsiansi a quelle indeterminate i cui coefficienti non sono termini direttori di nessuna riga, quindi a $n-r$ indeterminate.

Nell'es. di pag. 24 un sistema viene ridotto ad un altro, in cui l'ultima riga è composta di tutti 0; il rango della matrice del sistema e della matrice completa è 2. Si possono dare valori arbitrari all'indeterminata z. Le soluzioni sono le terne del tipo $2\lambda, 1-\lambda, \lambda$ che si possono considerare come scritte:

$$(0,1,0) + \lambda(2,-1,1)$$

Abbiamo quindi scritto la soluzione generica come una soluzione particolare della non omogenea + tutte le soluzioni della omogenea.

Non si può scegliere di dare valori arbitrari a qualsiasi indeterminata (vd. es. p. 125).

Due sistemi lineari compatibili sono equivalenti se e solo se le equazioni di uno sono combinazioni lineari di quelle dell'altro. Infatti, aggiungendo combinazioni lineari di equazioni non si cambia il rango.

Un sistema con una matrice $n \times n$ di rango n è detto di Cramer.
Se il rango è n, la matrice è invertibile. Se il sistema $AX = B$ è omogeneo, ci sono tante indeterminate quante righe e il rango è n l'unica soluzione è il vettore nullo. Se non lo è, moltiplichiamo per A^{-1}: otteniamo $X = A^{-1}B$. Ma sappiamo come si trova la matrice inversa: è quella che ha per denominatore il determinante di A e per numeratore il determinante della matrice che al posto della colonna i-esima ha il vettore B.

(Si può così determinare anche una sola componente della soluzione se ne interessasse una sola)

Esempietti.

Caso particolare: n indeterminate e rango n-1. Scriviamo il sistema omogeneo, e poi aggiungiamo di sopra una riga uguale alla prima, ottenendo così la matrice quadrata A'. Ovviamente il suo det è nullo. Scriviamolo come sviluppo della prima riga e quindi è

$$0 = |A'| = a_{11}A(1) + a_{12}A(2) + \dots a_{1n}A(n)$$

dove gli A(i) sono i determinanti dei minori che si ottengono togliendo dalla A la i-esima colonna. Pertanto questi determinantini sono soluzioni della prima equazione.
Lo sono anche delle altre?
Sì, perché il ragionamento si può ripetere mettendo in testa alla matrice A un'altra riga: il determinante di questa nuo-

va matrice A" è ovviamente ancora 0, e i determinantini sono gli stessi, e quindi risolvono anche la seconda.
Pertanto $< A(1), A(2), \ldots A(n) >$ è lo spazio vettoriale delle soluzioni, che ovviamente ha dimensione 1.

Problema inverso:
dato un insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$, determinare un sistema che ce l'abbia come insieme di soluzioni. L'insieme di soluzioni di un sistema è del tipo $\mathbf{v}+S$ dove $\mathbf{v}$ è un vettore ed S è un sottospazio. Un insieme di questo tipo si dice *varietà*.
Se il sistema è omogeneo, allora $\mathbf{v} \in S$.
Se il sistema non è omogeneo, la ennupla di tutti zeri non è una soluzione, quindi non possiamo scegliere a priori se possiamo volere un sistema omoge-

neo oppure no.
(*Si salta quasi tutta la p. 129*)

Esempio 11.14
$(0,1,1,0) + < (1,1,0,0),(0,0,1,1) >$
La varietà è di dimensione 2, e non è un sottospazio (qualsiasi quaterna non nulla di coefficienti non riesce ad annullare un vettore di quel tipo).
Il sistema ha 4 indeterminate $x,\ y,\ w,\ z,$
e *non* sarà omogeneo.
Ne troviamo uno omogeneo associato al sistema cercato, cioè con coefficienti

$$\begin{cases} a1 + b1 + c0 + d0 = 0 \\ a0 + b0 + c1 + d1 = 0 \end{cases}$$

Troviamo due soluzioni di questo sistema che siano indipendenti: così avremmo trovato la base del nucleo. Ad esempio (1,-1,0,0) e (0,0,1-1) sono soluzioni e sono indipendenti. Un sistema omogeneo associato è (dato che $x = y$ e $z = w$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ w - z = 0 \end{cases}$$

Adesso cerchiamo un vettore la cui immagine sia $(0, 1, 1, 0)$, quindi dobbiamo sostituire alle indeterminate $x,\ y,\ w,\ z$ questi valori e vedere cosa viene nei primi membri delle equazioni di sopra; otteniamo:

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ w - z = 1 \end{cases}$$

Questo è un sistema che ha come soluzioni la varietà proposta. (*si salta da metà della p. 130 a quasi tutta la p. 131*)

Cambiamenti di base

In V ho due basi:

$v_1, v_2, \ldots v_n$ e $w_1, w_2, \ldots w_n$.

Il vettore si esprime come $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ rispetto alla prima base e $y_1, y_2, \ldots y_n$ rispetto alla seconda.
Ogni vettore della seconda si scrive come combinazione lineare di quelli della prima; quindi il vettore delle y_i si ottiene moltiplicando il vettore delle x_i per una matrice, che si dice *matrice di cambiamento di base.* Se si vuole tornare dalla nuova base alla vecchia basta moltiplicare per l'inversa (perché siamo sicuri che sono sempre invertibili?)

Le matrici hanno come vettori colonne le componenti della base canonica nel nuovo sistema di riferimento, quindi dato un vettore che ha componenti (x, y, z) rispetto ad una base B, quelle rispetto alla base canonica si ottengono moltiplicando la matrice di cambiamento di base per il vettore stesso.

Esempietto.
Si applichi l'esempio 12.3 di p. 135 al vettore (3, 2 -1)

Abbiamo due spazi vettoriali V e W, con due basi ciascuno, B e B' su V e D e D' su W, e K è la matrice di cambiamento da B' a B in V e H la matrice di cambiamento da D a D' in W;
L: $V \to W$ è lineare
A la matrice di L rispetto alle basi B e D
A' la matrice di L rispetto alle basi B' e D'
allora passando da B' a B tramite la K e poi da V a W tramite la A e quindi in W da D a D' tramite la H, il prodotto di queste tre matrici è la matrice A'.

Se siamo adirittura sullo stesso spazio (endomorfismo), quanto sopra significa l'uguaglianza tra le due matrici

$$A' = HAK$$

e le due matrici H e K sono una l'invesa dell'altra.

Due matrici $A,\ A' \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si dicono *in relazione* se esistono due matrici H e K invertibili tali che $A' = HAK$.
Questa è una relazione di equivalenza; due matrici sono nella stessa classe solo se hanno lo stesso rango (e quindi il numero delle classi di equivalenza è uguale al numero dei ranghi possibili, cioè il numero minore tra n ed m).

Dato uno spazio vettoriale di dimensione n due basi si dicono in relazione di equivalenza se il determinante della matrice di passaggio dall'una all'altra è positivo (qui le classi di equivalenza sono 2).

Queste due classi si dicono *orientamenti*; si dice che due basi inducono lo stesso orientamento se sono nella stessa classe di equivalenza.