
ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA - canale 4
a.a. 2008-2009

7a settimana

6.4.-17.4.2009 (*tra il 9.4 e il 16.4: vacanze di Pasqua*)
(pp. 133-160)

Cambiamenti di base

In V ho due basi:

$v_1, v_2, \dots, v_n$ e $w_1, w_2, \dots, w_n$.

Il vettore $\mathbf{v}$ si esprime come

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

rispetto alla prima base e

$$(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

rispetto alla seconda.

Ogni vettore della seconda si scrive come combinazione lineare di quelli della

prima; quindi il vettore delle y_i si ottiene moltiplicando il vettore delle x_i per una matrice, che si dice *matrice di cambiamento di base*. Se si vuole tornare dalla nuova base alla vecchia basta moltiplicare per l'inversa (perché siamo sicuri che sono sempre invertibili?)

Le matrici hanno come vettori colonne le componenti della base canonica nel nuovo sistema di riferimento, quindi dato un vettore che ha componenti (x, y, z) rispetto ad una base B, quelle rispetto alla base canonica si ottengono moltiplicando la matrice di cambiamento di base per il vettore stesso.

Esempietto.

Si applichi l'esempio 12.3 di p. 135 al vettore $(3, 2, -1)$

Abbiamo due spazi vettoriali V e W , con due basi ciascuno, B e B' su V e D e D' su W , e K è la matrice di cambiamento da B' a B in V e H la matrice di cambiamento da D a D' in W ;

$L: V \rightarrow W$ è lineare

A la matrice di L rispetto alle basi B e D

A' la matrice di L rispetto alle basi B' e D'

allora passando da B' a B tramite la K e poi da V a W tramite la A e quindi in W da D a D' tramite la H , il prodotto di queste tre matrici è la matrice A' .

Ricordiamo che “matrice di cambiamento” è quella che ha come colonna i -esima le componenti dell’ i -esimo vet-

tore della prima base espresse tramite la seconda.

Se siamo addirittura sullo stesso spazio (endomorfismo), quanto sopra significa l'uguaglianza tra le due matrici

$$A' = HAK$$

e le due matrici H e K sono una l'inversa dell'altra.

Due matrici $A, A' \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ si dicono *in relazione* se esistono due matrici H e K invertibili tali che $A' = HAK$.

Questa è una relazione di equivalenza; due matrici sono nella stessa classe solo se hanno lo stesso rango (e quindi il numero delle classi di equivalenza è uguale al numero dei ranghi possibili, cioè il numero minore tra n ed m).

Dato uno spazio vettoriale di dimensione n due basi si dicono *in relazione di equivalenza* se il determinante della matrice di passaggio dall'una all'altra è positivo (quindi in questo caso le classi di equivalenza sono 2).

Queste due classi si dicono *orientamenti*; si dice che due basi *inducono lo stesso orientamento* se sono nella stessa classe di equivalenza. Per abitudine si sceglie di chiamare *positivo* l'orientamento dato dalla base canonica.

Quando si scambiano tra loro due vettori di una base si cambia l'orientamento.

Diagonalizzabilità, autovettori, autovalori e polinomi caratteristici

(pp. 139-154)

Montante: capitale + interessi (ad esempio 3% annuo); dopo N anni:

$$x_N = \left(1 + \frac{3}{100}\right)^N$$

Binomio di Newton:

$$(a + b)^N = \sum_{k=0}^N \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

dove il coefficiente binomiale

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (0 \leq k \leq n)$$

è il numero delle combinazioni di n oggetti presi a k alla volta.

Gatti e topi: tasso di riproduzione e di morte; situazione dopo un anno e dopo N anni (*p. 139*).

Difficoltà nel calcolo delle potenze di una matrice; è facile se sono diagonali. Verifica con

$$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Situazione con matrici quadrate $n \times n$ (prop. 13.1)

Definizione di matrici (quadrate) simili, diagonalizzabili, triangolarizzabili. (def. 13.2) L'essere simili è una relazione di equivalenza (verifica).

Prop. 13.3

Autovettore (def. 13.4)

Lemma 13.5

Es. 13.6: gli autovettori associati ad

un certo autovalore λ costituiscono uno spazio vettoriale, che si dice autospazio. Esempio 13.7 ed esercizi 13.8 a), b), c) e d). Fare a casa gli altri.

Si ricercherà il fatto se una matrice è diagonalizzabile, se ha matrici a cui è simile, quindi si troveranno tali matrici. Prima di tutto si cercherà se una matrice ha autovalori. Questo è determinato dalla prop. 13.9:

Data una matrice A di ordine n un numero reale è autovalore di A se e solo se

$$|(A - \lambda I_n)| = 0.$$

L'ultima equazione è una equazione algebrica di grado n e quindi ha al più n radici. Pertanto l'autospazio V_λ^A ha solo il vettore nullo salvo che per un numero finito di numero λ .

L'equazione

$$|(A - \lambda I_n)| = 0.$$

si dice "equazione caratteristica" e il suo primo membro si dice "polinomio caratteristico".

Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico (teor. 13.11)