ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA - canale 4

a.a. 2008-2009

7a settimana (seguito)

17.4.2009

Ripresa di alcune proprietà delle matrici e delle relazioni tra matrici, autovalori, autovettori.

Definizione di autovettore: $\mathbf{v}$ è un autovettore per la matrice A se $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, cioè se lo manda in un multiplo di se stesso (cioè ne fa cambiare solo il modulo, non la direzione).
λ si dice *autovalore*.
Un autovettore è associato a un autovalore solo, mentre un autovalore si riferisce ad un autovettore e anche a tutti i suoi multipli.

Enunciamo alcune proprietà comode (di dimostrazione facile):
se due matrici hanno lo stesso autovettore relativo a due autovalori diversi
$\Rightarrow$ la somma della matrici ha anch'essa lo stesso vettore come autovettore e come autovalori la somma degli autovalori
$\Rightarrow$ il prodotto delle matrici ha lo stesso autovettore e per autovalore il prodotto degli autovalori

Se una matrice è diagonalizzabile, anche le sue potenze lo sono, e anche il prodotto di tale matrice per uno scalare lo è.

Se due matrici sono diagonalizzabili, non è detto che il loro prodotto lo sia: provare con
$A = E_{11} - E_{22},\ B = E12 + E_{21}$

Ricordiamo il polinomio caratteristico e l'equazione caratteristica, e il fatto che un numero λ è un autovalore di A se e solo se è soluzione dell'equazione

$$|A - \lambda I| = 0.$$

Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico e hanno lo stesso rango, mentre potrebbero avere lo stesso rango e non essere simili.

L'equazione caratteristica potrebbe non avere soluzioni reali:
$\Rightarrow$ non ci sono autovalori (ad esempio una matrice che solo ruota i vettori, ad es. $A = E_{11} - E_{22}$; l'equazione caratteristica è:
$\lambda^2 + 1 = 0$.

Se gli autovettori sono in numero sufficiente da formare una base dello spazio, allora la matrice è diagonalizzabile.

Se dobbiamo cercare una base di $\mathbb{R}^n$, prendiamo tutti gli autospazi associati agli autovalori, e in ciascuno di questi prendiamo una base. Se l'unione di tutte queste basi è una base in $\mathbb{R}^n$, allora la matrice è diagonalizzabile.

Molteplicità geometrica: dimensione dell'autospazio associato a quell'autovalore

Molteplicità algebrica (indicata con $\mu(\lambda)$): massimo intero k tale che il polinomio $(\lambda - t)^k$ divida il polinomio caratteristico (*pp. 145-146*).

La molteplicità geometrica dice le dimensioni di quella parte di $\mathbb{R}^n$ che è lasciata su se stessa; la molteplicità algebrica invece può essere un numero superiore, come dice il teor. 13.12.

Infatti se si prende una base di V_λ^A e la si estende ad una base $v_1,\ v_2,\ \ldots, v_n$, sia H la matrice che ha questi vettori sulle colonne e sia $B = H^{-1}AH$; questa ha lo stesso polinomio caratteristico di A, perché le è simile, allora per un lemma, sulle prime k colonne di B c'è λ sulla diagonale e 0 altrove. Sia M il minore ottenuto da B eliminando le prime k righe e k colonne. Sviluppiamo il determinante secondo la prima colonna, otteniamo il polinomio caratteristico (che è uguale per entrambe le matrici A e B). Abbiamo

$$p_A(t) = p_B(t) = |H^{-1}AH - tI_n| = (\lambda - t)^k |M - tI_{n-k}|$$

quindi certamente $(\lambda - t)^k$ divide il polinomio caratteristico, però potrebbe dividere anche l'altro fattore.

Se unisco famiglie lineramente indipendenti di autovettori associati ad autovalori distinti, ottengo una famiglia linearmente indipendente. (niente dim.)

Il teor. delle dimensioni dice che la dimensione della somma dei vari autospazi più la dimensione del nucleo deve essere n; A è diagonalizzabile se e solo se la dimensione della somma degli autospazi è proprio n.

Quindi se A è di ordine n, risulta diagonalizzabile se e solo se il suo polinomio caratteristico si fattorizza in fattori di grado 1 e $\dim V_\lambda = \mu_\lambda$ per ogni autovalore λ. (teor. 13.14).

Se i fattori sono distinti, allora certamente la matrice è diagonalizzabile, ma questa condizione non è necessaria.

Quello che è interessante non è il trovare gli autospazi, bensì basta trovarne la dimensione.

Le matrici simili hanno dunque varie proprietà:
- lo stesso polinomio caratteristico
- lo stesso determinante (che è il termine noto del polinomio caratteristico)
- lo stesso rango
- gli stessi autovalori (sono le radici dello stesso polinomio caratteristico).

Non necessariamente hanno gli stessi autovettori (allungano o accorciano vettori diversi) però, se sono simili, le dimensioni di V_λ^A e V_λ^B sono uguali per qualsiasi numero reale λ.

Se A è simile ad una matrice diagonale D, allora D deve avere sulla diagonale gli autovalori di A (ciascuno rispettando la sua molteplicità come soluzione dell'equazione caratteristica.

Se una matrice è diagonalizzabile, allora una matrice H che la diagonalizza deve avere sulle colonne una base di autovettori di A. Si noti che ci sono infinite matrici che diagonalizzano una matrice, una volta trovatane una, tutte quelle che si ottegnono moltiplicando per uno scalare sono ancora diagonalizzanti.

Se due matrici sono simili, allora o sono diagonalizzabili entrambe o nessuna delle due, e due matrici diagonalizzabili sono simili se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico.

In generale non è facile vedere se due matrici A e B sono simili: bisogna che

ci sia una matrice invertibile H tale che AH=HB.
Verifichiamo che A= (0 1 // 2 3) e B = (0 3 // 2 1) *non* sono simili.

La somma degli elementi della diagonale di una matrice si dice **traccia**.
- La traccia di una matrice è il coefficiente di grado $n - 1$ del polinomio caratteristico (calcoliamolo per $n = 2$, poi si fa per induzione).
- Matrici simili hanno la stessa traccia.
- Se A è diagonalizzabile, il prodotto dei suoi autovalori (ognuno contato con la sua molteplicità) è il determinante di A e la somma dei suoi autovalori è la traccia della matrice.

Una matrice quadrata è triangolarizzabile se e solo se il suo polinomio caratteristico si fattorizza in fattori di primo grado. (teor. 13.19; niente dim.)