ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA - canale 4
a.a. 2008-2009

8a settimana
20.4.-24.4.2009
(*pp. 152-171*)

Riprendiamo il caso particolare (2×2) in cui si è notato che il determinante coincideva con il termine noto del polinomio caratteristico e il coefficiente del termine di grado $n-1$ di tale polinomio coincideva con la traccia della matrice, moltiplicata per $(-1)^{n-1}$. Lì si era visto che il coefficiente del termine di primo grado era $-(a+d)$.

In generale, in una matrice diagonalizzabile, il prodotto degli autovalori, ciascuno contato con la sua molteplicità, coincide con il determinante della ma-

trice, e la somma dei suoi autovalori coincide con la traccia.
Ovviamente sapendo traccia e determinante di una matrice di ordine 2 si conoscono anche gli autovalori.

Affinché una matrice sia diagonalizzabile, è necessario (ma non sufficiente) che il polinomio caratteristico sia scomponibile in fattori di primo grado (ci vuole in più che gli autovettori costituiscano una base).
Però se (e solo se) il polinomio caratteristico si scompone in fattori di primo grado, la matrice risulta triangolarizzabile.
Dimostriamo il "solo se". Infatti se una matrice è triangolarizzabile, cioè tale che $H^{-1}AH = T$ il suo polinomio caratteristico coincide con quello della triango-

larizzata (hanno gli stessi autovalori), e anche il determinante della triangolarizzata coincide con il prodotto degli elementi della diagonale e quindi coincide con il prodotto dei fattori $T_{ii} - \lambda_i$.

Somma diretta: la definizione non dice che sussistono certe proprietà, ma se ne sussiste una sussitono anche tutte le altre e viceversa:
- unendo una base di U e una di W se ne ottiene una di U+W;
- la dimensione dello spazio somma è la somma delle dimensioni degli addendi;
- l'intersezione dei sottospazi è il vettore nullo;
- ogni vettore della somma si può scrivere in un modo solo come somma di due vettori uno in U e uno in W.
In classe vediamo solo che dall'ultima

segue la prima.

Se sussiste una di queste proprietà si dice che V è la *somma diretta* di U e W e si scrive $V = U \oplus W$.

Proiezione su U secondo la direzione W:
$p_U^W(v) = v_U$
e simmetria rispetto a U secondo una direzione W:
$s_U^W(v) = v_U - v_W$
(*pp. 156-157*).
Facendo la simmetria della simmetria si ottiene l'identità, facendo la proiezione del risultato di una proiezione si ottiene il primo risultato immutato.

La somma di due autospazi di una matrice è diretta.

Estensione a più addendi.

È chiaro che quando gli spazi sono più di due, dire che la loro somma è diretta non equivale a dire che l'intersezione degli spazi a due a due è solo il vettore nullo.

Definizione di prodotto scalare tramite le proprietà, senza far ricorso alla geometria.
Il prodotto è commutativo, un fattore scalare viene fuori, è distributivo rispetto alla somma, e $v \cdot v > 0$ se $v \neq o$.

(Questa definizione ha senso se lo spazio vettoriale è sul corpo reale o complessso).

Rappresentazione del prodotto scalare come il prodotto di due matrici una di una riga e n colonne, l'altra di una colonna e di n righe.

Prodotti scalari che conosciamo: l'instegrale del prodotto tra le funzioni continue su un intervallo, tra le funzioni a quadrato integrabile su un intervallo. Se invece faccio l'integrale su un intervallo limitato di funzioni definite su tutto R, no (potrebbero essere nulle sull'intervallo ma non nulle su R).

Definizione di norma (con la disuguaglianza triangolare) e sua relazione con un prodotto scalare. Una norma può esistere senza provenire da un prodotto scalare, mentre un prodotto scalare dà sempre origine a una norma.

Disuguaglianza di Schwarz:

$|u \cdot v| \leq ||u|| \cdot ||v||$

(attenzione: il primo prodotto è il prodotto scalare tra vettori, il secondo è il prodotto solito tra numeri!)

Norma nello spazio euclideo

Norma del max tra i moduli delle singole componenti

Norma della somma dei moduli delle singole componenti.

Norma della radice quadrata dell'integrale del quadrato di una funzione continua su un intervallo (proviene da un prodotto scalare).

Norma dell'integrale del modulo di una funzione integrabile (*non* proviene da un prodotto scalare).

Norma del sup di una funzione su un intervallo (per le continue è il max).

Definizione di ortogonalità.