Seconda settimana

1a lezione
18.10.2004

Definizione di ortonormalità di un sistema di vettori $\{u_i\}$ in uno spazio di Hilbert.

0.0.1 TEOREMA. *(della migliore approssimazione in norma). Dato uno spazio prehilbertiano ed in esso una famiglia di vettori ortonormali $\{u_k\}$, i coefficienti $\{c_k\}$ che rendono minima la norma*

$$||x - \sum_{k=1}^{n} a_k \ u_k||$$

sono dati da

$$a_k = \langle x, u_k \rangle.$$

Se il sistema è linearmente indipendente, risulta dunque

$$||x||^2 \geq \textstyle\sum_{k=1}^n \ a_k^2 \text{ nel caso reale}$$
$$||x||^2 \geq \textstyle\sum_{k=1}^n \ |a_k|^2 \text{ nel caso complesso}$$

(*disuguaglianza di Bessel*).

Se il sistema forma una base, cioè ùn sistema completo si ha l'uguaglianza (*identità di Parceval*).

Serie trigonometriche e serie di Fourier.
Se una serie trigonometrica converge uniformemente ad una f, allora tale serie ha i coefficienti:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \ \cos x \ dx; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \ \sin x \ dx$$

Il caso delle funzioni continue: se f è continua, la serie di Fourier di f converge ad f in media quadratica (= nella norma di $L^2([-\pi, \pi])$

Criteri di convergenza

0.0.2 TEOREMA. *(***Criterio di Riemann-Lebesgue***) Se $f \in L([a, b])$, allora è*

$$\lim_{lambda \to \infty} \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} \ dx = 0 \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

e quindi i coefficienti di Fourier tendono a 0 comunque anche se la serie di Fourier non converge.

La dim. è significativa perché si dimostra la tesi per $f \in C^1([a,b])$ e poi si sfrutta la densità di C^1 in $L([a,b])$.
Si integra per parti e poi si maggiora il modulo dell'integrale della derivata.

0.0.3 TEOREMA. *(**Criterio del Dini**) Sia $f \in L([a,b])$; se per x fissato esiste in corrispndenza un numero reale $\delta > 0$ tale che*

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \right| dz < +\infty$$

allora la serie di Fourier converge in x ad $f(x)$.

****

Non fanno parte del programma d'esame (dal libro di testo C. Minnaja: *Metodi matematici per l'ingegneria - Parte II*):
dim. di 2.1.10; dim. di 2.1.13; 2.4; dim. di 2.5.1; dim. di 2.5.3; da 2.5.10 a 2.5.18; da 2.6.6 a 2.6.14; dim. di 2.6.15; dim. di 2.6.19.