COMPLEMENTI DI MATEMATICA

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Elettrotecnica

Prova parziale del 25.11.2004 Tempo concesso: 90 minuti

Tema 1

1. Si presenti il fenomeno di Gibbs.
2. Si descrivano le immagini delle rette parallele agli assi secondo la funzione $f(z) = z^2$ e si commenti il fatto che le immagini degli assi coordinati si incontrano formando un angolo piatto.
3. Si scriva la formula di Cauchy; in essa compare un integrale dipendente da a che ha valori diversi a seconda se a è dentro o fuori della curva a cui è esteso l'integrale. Si spieghi perché ciò non è in contraddizione con il principio di identità.
4. Consideriamo le funzioni
$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} z^n, \qquad f_2(z) = \frac{z}{1-2z}$$
dove sono definite? Dimostrare che f_2 è il prolungamento analitico di f_1 alla regione di olomorfia di f_2.
5. Si dica come sono classificati i punti singolari isolati di una funzione olomorfa. Quindi si dia un esempio per ognuno dei tipi di tale classificazione.
6. Si dica che tipo di singolarità (e in che punto) ha la funzione
$$f(z) = \frac{z}{1-\cos z}$$
Se ne scriva quindi lo sviluppo di Cauchy-Laurent fino al termine di grado 2.
7. La trasformata di Fourier gode di varie proprietà (tendenza a zero per $\omega \to \infty$, comportamento rispetto alla derivazione, rapidità della convergenza a zero, ecc.. Se ne scelga una e la si dimostri o la si commenti.
8. La funzione $f(z) = \frac{1}{z}$ è olomorfa in un cerchio di centro 2. Quanto è grande tale cerchio?
Si scriva quindi lo sviluppo di Cauchy-Taylor della f con origine tale punto.
9. Per alcune funzioni particolari c'è qualche relazione tra la trasformata di Fourier e le trasformate trigonometriche. Illustrare la situazione.
10. Si enuncino il principio di identità e il principio forte di identità (o di identità ristretta). Per dimostrare il secondo c'è bisogno del teorema degli zeri. Qual è il suo enunciato?