COMPLEMENTI DI MATEMATICA

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Elettrotecnica

Prova parziale del 4.11.2004 Tempo concesso: 90 minuti

Tema 1

1. Sullo spazio $C^0([-\pi, \pi])$ abbiamo considerato tre norme: quella che gli è propria e quelle che sono indotte dagli spazi $L^2([-\pi, \pi])$ e $L([-\pi, \pi])$ che contengono $C^0([-\pi, \pi])$. Presentare singolarmente le tre norme, proponendo anche qualche esempio di successione che converge secondo una di queste ma non secondo le altre.
2. Il criterio di Riemann-Lebesgue vale per quali funzioni? La dimostrazione è fatta per certe funzioni particolari e poi estesa sfruttando una densità. Esporre la situazione.
3. Consideriamo la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cos nx;$$
converge puntualmente in $[-\pi, \pi]$? Converge uniformemente? È una serie di Fourier?
Se ne può effettuare la derivazione per serie?
Giustificare le risposte.
4. Si dia un esempio di funzione integrabile sull'intervallo $[-1, 1]$, ma non a quadrato integrabile su tale intervallo, e un esempio di una funzione a quadrato integrabile sulla semiretta $[1, +\infty)$, ma *non* integrabile su tale semiretta.
5. Si definisca cosa è uno spazio prehilbertiano e si dica cosa significa che due vettori sono ortogonali in tale spazio.
6. Le funzioni a derivata limitata in tutto un intervallo garantiscono che in ogni punto di tale intervallo esse sono hölderiane (di che ordine?), e ciò a sua volta garantisce la convergenza puntuale ad $f(x)$ della loro serie di Fourier in ciascun punto. Perché? Descrivere la situazione utilizzando anche un esempio concreto.
7. Si dia la definizione di isomorfismo tra spazi di Hilbert, e si istituisca un isomorfismo tra ℓ^2 ed $L^2([-\pi, \pi])$.
8. Il prolungamento dispari all'intervallo $[-\pi, \pi]$ di una funzione definita su $[0, \pi]$ comporta una particolarità nei coefficienti della serie di Fourier di questa funzione prolungata. Analoga particolarità si verifica per il prolungamento pari.
Si esponga la situazione e poi si calcoli la serie di Fourier del prolungamento pari della funzione $\sin x$ definita su $[0, \pi]$.
9. Si dia la definizione di olomorfia in una ragione Ω per una funzione di variabile complessa.
La funzione $f(z) = |z|$ è olomorfa in qualche regione di $\mathbb{C}$? Perché?
10. La restrizione di $\sin z$ alla retta reale coincide con $\sin x$. Ma $\sin z$ nel campo complesso ha lo stesso periodo 2π che $\sin x$ ha nel campo reale? Perché?