

COMPLEMENTI DI MATEMATICA

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Elettrotecnica

Prova di recupero del 25.11.2004

Tempo concesso: 90 minuti

**Tema 1**

1. Si dica cosa è una norma per uno spazio vettoriale, e si dica quando uno spazio vettoriale normato si dice completo.  
Abbiamo conosciuto spazi normati completi? Quali?  
Giustificare le risposte, servendosi di qualche esempio.

2. Si sono visti dei teoremi che mettevano a confronto proprietà di una funzione con la velocità di tendenza a zero dei suoi coefficienti di Fourier. Si illustri la questione.

3. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin nx;$$

converge puntualmente in  $[-\pi, \pi]$ ? Converge uniformemente? È una serie di Fourier?

Se ne può effettuare la derivazione per serie?

Giustificare le risposte.

4. Funzioni continue, derivabili, h olderiane: si tratta di classi di funzioni a intersezione non vuota. Si illustri la situazione enunciando dei teoremi e facendo qualche disegno che mostri inclusioni totali o parziali di una classe nell'altra.
5. Si definisca il prodotto scalare in uno spazio prehilbertiano e si dica quali propriet  aggiuntive rendono hilbertiano uno spazio prehilbertiano.
6. Sia il criterio del Dini che quello di Dirichlet parlano di convergenza puntuale di serie di Fourier; le ipotesi tuttavia sono diverse. Si illustri la situazione, presentando anche funzioni che soddisfano alle ipotesi di un criterio ma non a quelle dell'altro e viceversa.
7. Si definisca lo spazio  $\ell^2$ , compresa la sua struttura di prodotto scalare.
8. Il prolungamento dispari all'intervallo  $[-\pi, \pi]$  di una funzione definita su  $[0, \pi]$  comporta una particolarit  nei coefficienti della serie di Fourier di questa funzione prolungata. Analoga particolarit  si verifica per il prolungamento pari. Si esponga la situazione e poi si calcoli la serie di Fourier del prolungamento dispari della funzione  $\cos x$  definita su  $[0, \pi]$ .
9. Si dia la definizione di olomorfia in una regione  $\Omega$  per una funzione di variabile complessa.  
Perch  una funzione a soli valori reali non pu  essere una funzione olomorfa, a meno che non si tratti di una costante?
10. Il logaritmo nel campo complesso   una funzione polidroma. Si dica quanti valori ha a seconda che l'argomento del logaritmo sia un numero intero, razionale o reale, giustificando le proprie affermazioni.