CM51sett.tex

COMPLEMENTI DI MATEMATICA a.a. 2005-2006
(Laurea Specialistica in Ingegneria Elettrotecnica)

Prima settimana
Inizio: lunedì 3.10.2005

Introduzione al corso.
Richiamo sugli spazi metrici: nozione di distanza, sua positività, simmetria; disuguaglianza triangolare.
La distanza euclidea in $\mathbb{R}^n$:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Spazi vettoriali di dimensione finita.

Norma: positività, escono fuori i coefficienti con il modulo, disuguaglianza triangolare.
Spazi normati. Uno spazio normato si può sempre far diventare uno spazio metrico ponendo $d(x,u) = ||x-y||$.

Spazio *prehilbertiano*: *prodotto scalare* $p : V \times V \to \mathbb{K}$, simmetria, (con il coniugio), vengon fuori i coefficienti, distributività rispetto alla somma, positività di $\langle x, x \rangle$.
Ortogonalità.

Convergenza in uno spazio metrico: convergenza secondo Cauchy, completezza.
Spazio *topologico* V: sistema di intorni $I_\epsilon(x) = \{y \in V : d(x,y) < \epsilon\}$.
Convergenza secondo Cauchy in uno spazio topologico; *completezza.*
Uno spazio normato completo si dice *spazio di Banach.*

Sottoinsieme *denso* in uno spazio metrico.
(definizioni, esempi ed esercizi da 1.1.18 a 1.1.21)

Spazio metrico *separabile.*
Spazio *hilbertiano*: prehilbertiano, completo, separabile e di dimensione infinita.

Isomorfismo tra spazi vettoriali e tra spazi di Hilbert (1.1.27)

Lo spazio ℓ^2 (1.1.28).

Gli spazi funzionali (1.5)
Esempi ed esercizi da 1.5.8 a 1.5.13 (saltando 1.5.11). Esercizi proposti del cap. 1 (saltando i n.^{i} 2, 3, 4, 7, da 10 a 14, 16; per le soluzioni vd. Appendice A).

Dimensioni, basi ed approssimazioni (§1.9).

0.0.1 DEFINIZIONE. In uno spazio V a dimensione infinita un sistema di vettori $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ si dice *base* se per ogni vettore $v \in V$, $\forall\epsilon > 0$ si può trovare un numero finito $k(\epsilon)$ di coefficienti c_i tale che:

$$||x - \sum_{i=1}^{k(\epsilon)} c_i u_i|| < \epsilon.$$

□

0.0.2 TEOREMA. *(della migliore approssimazione in norma) (senza dim.): Dato uno spazio prehilbertiano ed in esso una famiglia di vettori ortonormali* $\{u_k\}$, *i coefficienti* $\{c_k\}$ *che rendono minima la norma*

$$||x - \sum_{k=1}^{n} a_k \; u_k||$$

sono dati da

$$a_k = \langle x, u_k \rangle.$$

Serie di funzioni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n$$

e sviluppo di una funzione in serie di funzioni.
Se gli u_n sono funzioni trigonometriche, la funzione è sviluppata in serie trigonometriche.

4.10.2005 - Prof Celi

5.10.2005

Norme diverse su $C^0([a, b])$.

Isomorfismo tra spazi vettoriali e tra spazi di Hilbert.

Riprendere il concetto di *base* per uno spazio vettoriale a dimensione infinita.

Riprendere il teor. della migliore approssimazione in norma.

Se il sistema è linearmente indipendente, risulta dunque

$$||x||^2 \geq \sum_{k=1}^{n} \ a_k^2 \text{ nel caso reale}$$
$$||x||^2 \geq \sum_{k=1}^{n} \ |a_k|^2 \text{ nel caso complesso}$$

(*disuguaglianza di Bessel*).

Se il sistema forma una base, cioè un sistema completo, si ha l'uguaglianza (*identità di Parceval*).

Serie trigonometriche e serie di Fourier.
Se una serie trigonometrica converge uniformemente ad una f, allora tale serie ha i coefficienti:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \ \cos x \ dx; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \ \sin x \ dx$$

Richiami sulle serie di Taylor e significato dell convergenze dei due tipi di serie.

Definizione di $L^2([a, b])$, del suo prodotto scalare e della sua norma.

Definizione di $L^1([a, b])$ e della sua norma (che *non* proviene da un prodotto scalare).

Densità (def. 1.6.1).

Teoremi di densità: C^1 è denso in C^0, che è denso in L^2 che èdenso in $L1$. (teorr. 1.6.4, 1.6.5, 1.6.6)

Teorema di Fischer-Riesz (senza dim.; teor. 1.5.15 nel caso $p = 2$)

Esercizi 1.5.24, 1.5.28 (tipi di convergenza)

Il caso delle funzioni continue: se f è continua, la serie di Fourier di f converge ad f in media quadratica (= nella norma di $L^2([-\pi, \pi])$).

Criteri di convergenza

0.0.3 Teorema. *(***Criterio di Riemann-Lebesgue***) Se $f \in L([a,b])$, allora è*

$$\lim_{lambda \to \infty} \int_a^b f(x)e^{i\lambda x}\, dx = 0 \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

e quindi i coefficienti di Fourier tendono a 0 comunque anche se la serie di Fourier non converge.

La dim. (cenni) è significativa perché si dimostra la tesi per $f \in C^1([a,b])$ e poi si sfrutta la densità di C^1 in $L([a,b])$.
Si integra per parti e poi si maggiora il modulo dell'integrale della derivata.

0.0.4 Teorema. *(***Criterio del Dini***) Sia $f \in L([a,b])$; se per x fissato esiste in corrispondenza un numero reale $\delta > 0$ tale che*

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \right| dz < +\infty$$

allora la serie di Fourier converge in x ad $f(x)$.

0.0.5 Teorema. *(di Riemann sul carattere locale dela convergenza dela serie di Fourier) La convergenza o meno in un punto x della serie di Fourier dipende dai valori della funzione in un intorno di quel punto arbitrariamente piccolo, metre i coefficienti della serie dipendono dai valori su tutto l'intervallo.*

0.0.6 Esercizio. Non è detto che una funzione continua in un punto soddisfi in quel punto la condizione del Dini; la continuità indica semplicemente che il numeratore della funzione integranda tende a zero, ma potrebbe tendere a zero di un ordine inferiore a qualsiasi ordine inferiore al primo. □

0.0.7 Teorema. *(***Condizioni del Dini unilaterali***): se esistono finiti il limite destro e sinistro della f, e sono finiti gli integrali fatto sull'intervallo tra 0 e δ e tra $-\delta$ e 0), allora la serie di Fourier converge alla media dei due limiti:*

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

(niente dim.)

Nel caso che f sia continua, e siano soddisfatte le condizioi del Dini unilaterali, si ha il criterio del Dini visto prima.

Punti di salto: se esistono i limiti destro e sinistro per $x \to x_0$ diversi tra loro, si dice *salto* la quantità $f(x_0+0) - f(x_0-0)$. È irrilevante se la f esista in quel punto ed eventualmente quale valore abbia.

Condizione di Hölder; definizione di funzione hölderiana di ordine α in un punto. (def. 2.6.22)

Se $\alpha = 1$ la funzione si dice *lipschitziana.*

Notamo che se una funzione è hölderiana in un punto, è certamente continua in quel punto.

Funzioni hölderiane e loro relazione con le funzioni derivabili; funzioni lipschitziane (2.6.22; 2.6.23).

Esempio di funzione non hölderiana di nessun ordine α ($1/\lg|x|$ in un opportuno intorno di 0; vd. 2.6.24).

0.0.8 TEOREMA. *Se f ha derivata limitata in un intero intervallo $[a, b]$ allora è uniformemente lipschitziana in $[a, b]$.*

(con dim.) (2.6.26)

Esistono però funzioni che sono lipschitziane in un punto pur non avendo la derivata limitata in nessun intorno del punto:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} \; per \; x = 0 \\ 0 \; per \; x = 0 \end{cases}$$

Teorema sulla convergenza della serie di Fourier nei punti di hölderianità (con dim.) (2.6.28).

Condizioni di Hölder unilaterali (con la h che può variare solo in un intorno destro o in un intorno sinistro; vd. 2.6.30).

0.0.9 TEOREMA. *Se f ha dei punti di salto, e in tali punti verifica le condizioni di Hölder unilaterali, la serie di Fourier converge alla media dei limiti destro e sinistro.*

(niente dim.)

Condizioni di Dirichlet e criterio di Dirichlet (2.7.1; 2.7.2); rapidità della convergenza a zero dei coefficienti (cenno).
Accelerazione della convergenza (2.7.8, cenno).
Confronto con la continuità e con il criterio del Dini (2.7.10; 2.7.11).

Fenomeno di Gibbs (2.7.22).

Esercizi proposti del Capitolo 2 (per le soluzioni vd. Appendice A in fondo al libro).

****

Non fanno parte del programma d'esame: (i numeri si riferiscono al libro di testo: C. Minnaja: Metodi matematici per l'Ingegneria, Parte II - Integrale di Lebesgue, serie di Fourier, trasformate, distribuzioni. Ed. Progetto, 2000): 1.1.11; 1.1.12; la dim. della completezza di ℓ^2 (a p. 9); 1.1.31; 1.1.32; 1.1.39; da 1.2 a 1.8; da 1.9.5 a 1.9.9; dim di 1.9.10; da 1.9.13 a 1.9.17; esercizi proposti 1, 3, 7, 10 di p. 46; dim. di 2.1.10; dim. di 2.1.12; 2.1.17; il calcolo di 2.2.3; 2.2.9; 2.4; dim. di 2.5.1; dim. di 2.5.3; da 2.5.10 a 2.5.18; dim.

di 2.6.2; caso 3) dell'es. 2.6.5; da 2.6.6 a 2.6.14; dim. di 2.6.15; 2.6.16 (ad eccezione delle ultime sei righe); dim. di 2.6.19; 2.6.33; da 2.7.12 a 2.7.21; da 2.8 a 2.11; esercizi 7, 8, 16, 17 di p. 123; esercizio 28 di pag. 124.