CM54sett.tex

4a settimana

Prima lezione (ore 21a-22a)
24.10.2005

Teorema di Darboux: se una funzione ha valori in modulo minori di M su una curva di lunghezza ℓ, allora l'integrale sulla curva è in modulo minore di $M\ell$.

Due risultati preliminari (prima del teor. di Cauchy).
Dimostrazione delle due formule

$$\oint_{gamma} dz = 0; \quad \oint_{gamma} z\ dz = 0.$$

(4.3.1)

0.0.1 TEOREMA. *(di Cauchy) - Sia f una funzione olomorfa in una regione Ω e sia γ una curva omologa a zero in Ω. Allora*

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 0.$$

(4.3.2; *niente dim.*)

Solo accenno al lemma di Goursat (che estende la tesi del teor. di Cauchy anche a funzioni che non hanno le drivata prima continua).

Teor. di Cauchy per le regioni multiplamente connesse.
(da 4.3.6 a 4.3.8)

Formula di Cauchy (senza dim.)
Importanti: 4.4.2 e 4.4.3.

Proprietà di media dell'integrale su una circonferenza
(da 4.4.8 a 4.4.10)

Formula di Cauchy per la derivata prima
(4.4.13, *niente dim.*)

Formula di Cauchy per le derivate successive
(4.4.15; *niente dim.*)

2a lezione (ore 23a-24a)
25.10.2005
Prof. Celi

Def. di Laplaciano e di funzione armonica.
Una funzione olomorfa ha componenti armoniche ed è armonica essa stessa.
Esercizio 5, p. 54.
Forme differenziali lineari, chiuse, esatte; se sono esatte il loro integrale dipende solo dagli estremi e non dalla curva.
Ricerca di un'armonica coniugata, es. 6, p. 54 ed es. 2.6.22, p. 48.

Trasformazine conforme e isogonica; significato del modulo e dell'argomento della derivata di una funzione olomorfa quando si tratta di una trasformazione (teor. 3.1.1; *niente dim.*)
Es. 3.1.8 (attenzione: a p. 59, riga 3 deve essere $v = (\operatorname{tg} y_0)u$).

3a lezione (ore 25a-26a)
26.10.2005

Formula di Cauchy (anche per le derivate successive) per le regioni non semplicemente connesse
(4.4.21; attenzione a cosa vuole dire Γ quando la connessione non è semplice)

Definizione di *funzione integrale*: si può dare, dato che l'integrale di una funzione olomorfa non dipende dagli estremi:

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(t)\ dt.$$

Teor. di Morera: Se l'integrale è nullo su ogni circuito chiuso di una regione Ω, ed f è continua in Ω, allora f è olomorfa in Ω.
(4.5.1; *niente dim.*)

0.0.2 TEOREMA. *Teorema fondamentale del calcolo integrale:*

$$\int_{z_0}^{z} f'(t)\ dt = f(z) - f(z_0).$$

<u>Teorema della limitazione delle derivate successive</u>. f è olomorfa in una regione, e siamo su una circonferenza di centro z (NON a) e raggio r contenuta in Ω omologa a 0, ed $M(r)$ è il massimo del modulo della f assunto sulla circonferenza; allora vale la maggiorazione:

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!M(r)}{r^n}$$

Attenzione: si tratta di disuguaglanze tra numeri reali. (4.5.4; la dim. si fa scrivendo la formula di Cauchy per la derivata n-sima sulla circonferenza; questa volta la variabile che corre sulla crf. è t e il punto fisso è z; maggioro i moduli mettendo dentro all'integrale il modulo della f; al denominatore c'è adesso r^{n+1} che è il modulo di $(t-z)^{r+1}$, e l'integrale lo faccio in ds, che porta semplicemente $2\pi r$. La r si semplifica con una r di sotto.

0.0.3 TEOREMA. *(di Cauchy-Liouville) - Se f è olomorfa e limitata su tutto $\mathbb{C}$ allora è costante.*

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{r}$$

Infatti facciamo la derivata prima e la limitiamo con una quantità che può essere piccola a piacere, dato che r è arbitrario, e la M al numeratore è fissa.

Esempio con la non limitatezza del seno.

Teorema fondamentale dell'algebra.

4a lezione(ore 27a-28a)
27.10.2005

Richiami sulle serie convergenti e uniformemente convergenti; possibilità di derivazione per serie e di integrazione per serie (cenni), ripetute per le funzioni olomorfe.

Ricordiamo la somma di una serie geometrica; la somma parziale è

$$\sum_{n=0}^{k} z^n = \frac{1-z^{k+1}}{1-z}$$

(per errore sul libro è scritto z^k) e facendo il limite per $k \to \infty$ si ha:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

dove la serie converge, cioè per $|z| < 1$.

Spostamento del centro della serie geometrica dall'origine in un punto a appartenente al cerchio di convergenza (es. 5.2.8, p. 115).

0.0.4 TEOREMA. *(di Cauchy-Taylor). - Sia F olomorfa in un intorno del punto a. allora nel più grande cerchio di centro a e contenuto in tale intorno risulta convergente la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

e in ogni punto di tale cerchio vale l'uguaglianza

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

(dim.: si va a scrivere la formula di Cauchy...; 5.2.1, compresa la dim.)

Funzioni analitiche e loro coincidenza con la funzioni olomorfe: classe $H(\Omega)$.

Unicità dello sviluppo in serie di potenze (5.2.4, senza dim.)

Esempio di funzione reale che è C^∞ ma non è analitica: $e^{-\frac{1}{x^2}}$. (esempio analogo: 5.3.10)

Principio di identità delle funzioni analitiche (5.3.1, senza dim.).
Richiamo sul principio di identità dei polinomi (5.3.2).

Teorema degli zeri (5.3.5, senza dim.).

Prolungamento analitico (fino a 5.4.4).

****

Non fanno parte del programma d'esame: dim di 3.1.1; 3.1.11; 3.1.14; 3.1.15; §3.2; §3.3; esercizi 2 e 5, p. 83; dim. di 4.3.2; 4.3.3; 4.3.4; dim. di 4.3.10; dim. di 4.4.1; dim. di 4.4.13; dim. di 4.4.15; 4.4.16; 4.4.17; dim. di 4.5.1; dim. di 4.5.4; 4.5.6; dim. di 5.1.5; 5.2.14; 5.2.15; dim. di 5.3.1; 5.3.4; dim. di 5.3.5; da 5.3.6 a 5.3.9; da 5.3.11 a 5.3.14.