CM58sett.tex

8a settimana

Prima lezione (ore 50a-51a)
21.11.2005

Richiamo della convoluzione in $\mathbb{R}$, e ricordo che con le funzioni sommabili anche il prodotto di convoluzione è sommabile.

Convoluzione in $\mathbb{R}_0^+$: si parte da funzioni localmente sommabili e si nota che per $t - \tau < 0$ qualsiasi funzione è nulla, e quindi il prodotto di convoluzione in $\mathbb{R}_0^+$ risulta:

$$f * g = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau$$

Vd. fig. 4.12, p. 185.

Se le funzioni sono sommabili su $\mathbb{R}$ sappiamo che anche $f * g$ è sommabile; si può dimostrare che se le funzioni sono semplicemente localmente sommabili, lo è anche il loro prodotto di convoluzione.

Trasformata di Laplace del prodotto di convoluzione: se sia f che g sono (assolutamente) $\mathcal{L}$-trasformabili con ascissa di convergenza (assoluta) ρ_1 e ρ_2 rispettivamente, lo è anche il loro prodotto di convoluzione, e la sua ascissa di convergenza è $\leq$ della maggiore delle ascisse di convergenza, e per $Re(s) > \max[\rho_1, \rho_2]$ risulta

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$$

(niente dim.). Ovviamente il primo membro potrebbe esistere anche dove non esiste il secondo, o uno dei suoi due fattori; in tal caso la formula indica l'uguaglianza tra i due prolungamenti analitici.

0.0.1 TEOREMA. *Se f è trasformabile con a.d.c. ρ_0 il suo integrale da 0 a t è assolutamente trasformabile con a.d.c. (assoluta) $\rho \leq \max[0, \rho_0]$ e vale*

$$\mathcal{L}\Big(\int_0^t f(\tau)\, d\tau\Big) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f)$$

Si ricorda che una primitiva è sempre più regolare della funzione, mentre derivando si perde in regolarità.
La dim. si ottiene subito se si mette nelle ipotesi l'assoluta trasformabilità:

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau = f * H$$

e trasformando ambo i membri, il secondo risulta $\mathcal{L}(f)\cdot\mathcal{L}(H)$ e quest'ultimo fattore vale $\frac{1}{s}$. (Il grosso della dimostrazione sarebbe nel dimostrare l'assoluta trasformabilità della primitiva).

Ricordiamo la seconda formula fondamentale di Laplace che vale se le funzioni sono assolutamente continue.

Consideriamo un'equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti

$$y' + ky = f(t)$$

con $y(0) = y_0$ ed applichiamo la trasformata di Laplace. Otteniamo quella che chiamiamo *equazione immagine*, e chiamando $Y(s)$ la Laplace-trasformata di y e $F(s)$ la trasformata di f,

$$Y(s) = F(s)\frac{1}{s+k} + y_0\frac{1}{s+k}$$

Si tratta ora di antitrasformare: il primo termine del secondo membro è la trasformata del prodotto di convoluzione tra f ed e^{-kt}.

Proviamo con una del 2^o ordine del tipo

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

. Ricordiamo che l'espressione $as^2 + bs + c$ si dice *polinomio caratteristico* ed uguagliandolo a 0 si ottiene l'*equazione caratteristica*. Se applichiamo la trasformata di Laplace ad entrambi i membri otteniamo

$$y = h + f * g$$

dove g è l'antitrasformata di $\frac{1}{\text{polinomio caratteristico}}$. La h è l'evoluzione libera, mentre la $f * g$ è l'evoluzione forzata.
Utili esercizi: 4.12.6, 4.12.7; da 4.12.9 a 4.12.13

Seconda lezione (ore 52a-53a)
22.11.2005

La trasformata di Fourier fatta sulle funzioni che sono nulle prima dello 0.

La trasformata di Laplace è una famiglia di trasformate di Fourier delle funzioni $f(t)e^{-xt}$ (4.9.7).

Inversione della trasformata di Laplace (formula (4.10.4), p. 203); indipendenza dalla retta su cui si esegue il cammino di integrazione.

Unicità della antitrasformata (4.10.6; solo enunciato; 4.10.7).

Esistenza di funzioni olomorfe che tendono a zero nell'angolo convesso $A(s_0, \theta)$ e che tuttavia non sono trasformate di Laplace (e^{-s}: vd. 4.10.10).

Esempio di inversione (4.11.5 fino alle prime 5 righe di p. 216).

<u>Introduzione alla teoria delle distribuzioni</u> (vd. cap. 5). Lo spazio $\mathcal{D}$ delle funzioni di prova. Convergenza in tale spazio (5.1.5).
Definizione di *funzionale* su uno spazio vettoriale di funzioni. Funzionali su $\mathcal{D}$; funzionali lineari.
Funzionali continui: se data una successione di ϕ_n convergente a ϕ in $\mathcal{D}$, il funzionale T è tale che $T(\phi_n) \to T(\phi)$ in $\mathbf{R}$.

Lo spazio duale $\mathcal{D}$'. Un primo esempio di funzionale su $\mathcal{D}$; quello che prende una funzione ne fa l'integrale su $\mathbb{R}$. È un caso particolare del 5.1.11.

Notazione per i funzionali: invece che la notazione naturale $T(\phi)$ si usa per tradizione la seguente

$$\langle T, \phi \rangle$$

Altro esempio: quello in cui si considera una funzione $f \in L_{loc}(\mathbb{R})$ si fa l'integrale di $f(x)\phi(x)$; tale funzionale viene indicato con T_f e si dice *distribuzione associata alla funzione* f (vd. 5.1.11).

Il funzionale associato a due funzioni differenti su un'infinità numerabile di punti è unico; viceversa se due funzionali T_f e T_g sono uguali (cioè hanno valore uguale su tutte le ϕ, allora f e g differiscono soltanto su un insieme di misura nulla (la dimostrazione di questo fatto è piuttosto delicata) (Vd. 5.1.12).

Definizione della distribuzione di Heaviside.

Definizione della δ di Dirac: $\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0)$.
Definizione della δ traslata: $\langle \delta_{(a)}, \phi \rangle = \phi(a)$ (Vd. 5.1.14).

Alcune scritture improprie della δ sotto forma di integrale (5.1.16).

La funzione campionata come $\sum_{n=0}^{\infty} \phi(nT)$ viene scritta come $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \delta(x-nT)\phi(x)\, dx$.

La distribuzione definita $\langle T, \phi \rangle = \phi'(0)$ è anch'essa una distribuzione: infatti applicandola alle ϕ_i ottengo una successione che converge a $\phi'(0)$ in quanto in $\mathcal{D}$ convergono anche le derivate.

La funzione campionata come $\sum_{n=0}^{\infty} \phi(nT)$ viene scritta come $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \delta(x-nT)\phi(x)\, dx$.

Terza lezione (ore 54-55)
22.11.2005

Insieme nullo per una distribuzione e suo supporto. Una distribuzione si dice *nulla* su un aperto Ω di $\mathbb{R}$ se la T ha valore 0 su tutte le ϕ che hanno supporto entro Ω. L'unione di tutti tali Ω si dice *insieme nullo* di T; il suo complementare si dice *supporto* di T.

Lo spazio $\mathcal{S}$ delle funzioni a decrescenza rapida: tali che trascinano a 0 anche $|x|^k$ con tutte le loro derivate:

$$\lim_{x\to\infty} |x|^k \frac{d^m\phi}{dx^m} = 0.$$

Il duale di $\mathcal{S}$, che si denota con $\mathcal{S}$', si dice spazio delle *distribuzioni temperate.* Sono distribuzioni particolari. (Vd. 5.1.30 e solo intuitivamente 5.1.31) Sono distribuzioni temperate quelle a supporto compatto e quelle associate a funzioni a *crescenza lenta*, cioè maggiorate dalle potenze della x.

Definizione di *prodotto di una funzione C^∞ per una distribuzione.* Esempi (da 5.1.33 a 5.1.36).

Quarta lezione (ore 56-57)
23.11.2005

<u>Intervento del valutatore.</u>

Uguaglianza dei funzionali associati a funzioni che differiscono soltanto su un insieme di misura nulla. Viceversa se due funzionali del tipo T_f e T_g sono lo stesso funzionale, allora le due funzioni f e g differiscono soltanto su un insieme di misura nulla.

Insieme di Cantor (insieme di misura nulla e tuttavia non costituito soltanot di un insieme numerabile di punti).

Funzione di Cantor come esempio di funzione *non* assolutamente continua.
(*L'insieme e la funzione di Cantor sono stati esposti a puro titolo culturale, e non fanno parte del programma d'esame.*)

Derivata di una distribuzione. Derivazione del prodotto di una funzione C^∞ per una distribuzione. La δ come derivata della distribuzione T_H (o

direttamente H.
La derivata delle distribuzioni $x^n\delta$ (che è la distribuzione nulla). (Vd. da 5.2.1 a 5.2.7.)

Convergenza in $\mathcal{D}$' (vd. da 5.3.1 a 5.3.3).

****

Non fanno parte del programma d'esame (a parziale correzione di quanto esposto nella 7a settimana): da 4.1.2 a 4.1.7; dim. di 4.1.12; 4.1.13; la seconda metà di 4.1.16; 4.1.22; dim. di 4.2.4; dim. di 4.2.5; dim. di 4.2.7; dim. di 4.2.12; 4.2.18, salvo la formula (4.2.29); 4.2.19; dim. di 4.3.2; la formula (4.3.4); dim. di 4.3.7; dim. di 4.4.5; 4.5.1; dalla terza riga in poi della di. di 4.5.2; 4.5.7; §4.6; da 4.9.1 a 4.9.6; 4.9.8; 4.10.1 salvo la formula (4.10.4); dim. di 4.10.2; 4.10.3; 4.10.4; dim. di 4.10.6; 4.10.8; 4.10.9; da 4.10.11 a 4.11.4; da metà della p. 216 a 4.12.5; 4.12.8; da 4.12.14 alla fine del cap. 4; tra gli esercizi proposti: da 23 a 32, da 49 a 51, 62, 72, 76, 80, 82, 83; 5.1.13; dall'ultimo capoverso di p. 237 alla fine di 5.1.15; 5.1.19; 5.1.24; 5.1.25; 5.2.8; 5.2.9; 5.2.11.