

COMPLEMENTI DI MATEMATICA

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Elettrotecnica

Prova parziale del 3.11.2005

Tempo concesso: 90 minuti

Tema 1

1. Si definisca uno spazio prehilbertiano e si dica quali proprietà ulteriori ha uno spazio hilbertiano.
2. Si dia la definizione di *base* (o *sistema completo*) di uno spazio vettoriale. In $L^2([-\pi, \pi])$ abbiamo incontrato una base ortonormale: quale? E quale base abbiamo incontrato in ℓ^2 ?
3. Scrivere la formula di Cauchy; in essa compare un integrale funzione di un punto a . Per quali valori di a essa vale? Che valore ha l'integrale a seconda di dove si trova a ?
4. Le funzioni hölderiane di ordine 2 sono anche hölderiane di ordine $\frac{1}{2}$? Perché?
5. Si dia la definizione di *prolungamento analitico*, utilizzando i vari sviluppi in serie di potenze, con centri diversi, della serie geometrica. Si scrivano quindi i primi tre termini dello sviluppo in serie di potenze della funzione $f(z) = \frac{1}{1-z}$ con centro nel punto $z = i$. Qual è il raggio del cerchio in cui vale tale sviluppo?
6. Data una funzione armonica, come si definisce una sua armonica coniugata? Trovare le armoniche coniugate della funzione $u(x, y) = x^2 - y^2$, e poi in particolare quella armonica coniugata $v(x, y)$ tale che $u + iv$ valga i nell'origine.
7. Definire la funzione potenza z^α ed illustrare i casi in cui è una funzione ad un solo valore, a un numero finito di valori, o a un numero infinito di valori.
8. Si dia la definizione di convergenza uniforme di una serie di funzioni in un intervallo. Si esponga quindi il teorema che garantisce la possibilità di derivare per serie.
9. Si calcoli lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $f(x) = x$, per $-\pi \leq x \leq \pi$ e se ne discuta la convergenza.
10. Si esponga alcune relazioni tra funzioni circolari e funzioni iperboliche nel campo complesso.