COMPLEMENTI DI MATEMATICA

Esercitazione in classe dell'1.12.2005 Tempo concesso: 90 minuti

Vengono proposti più esercizi per ogni tipo. Nella prova parziale ne verrà proposto uno solo. Gli altri sono al fine di esercitarsi.

1. a) Principio di identità e principio forte di identità: enunciarli ed evidenziarne le differenze.
   b) Costruzione delle funzioni trigonometriche partendo da quelle reali: basta sostituire la variabile complessa a quella reale. Perché?
   c) Quali sono le singolarità della funzione $f(z) = \frac{1}{z^2(e^z-1)}$? Sviluppare poi la funzione in serie di Cauchy-Laurent in un intorno di $z = 0$ fino al termine che coinvolge z^{-3}.
   d) Enunciare il teorema dei residui ed esporre un caso di applicazione.

2. a) Tipi di singolarità e proprietà geometriche corrispondenti. Esporre un caso concreto per ogni tipo.
   b) Formula di Cauchy per le derivate successive: quale sarebbe il punto centrale della dimostrazione?
   c) Si enunci il teor. di Cauchy-Laurent, evidenziandone le differenze con il teor. di Cauchy-Taylor.
   d) Funzioni monodrome e funzioni polidrome: definizione e loro relazione con il prolungamento. (Sugg.: vd. pagg. 129-131 del vol. I).

3. a) Si presenti il teorema del campionamento, illustrando i grafici delle funzioni che compaiono nella formula di Shannon.
   b) Si dia la definizione della trasformata di Fourier e se ne illustrino le principali proprietà.
   c)
   $$\mathcal{F}(f^{(n)}(x)) = (i\lambda)^n(\mathcal{F}(f(x)))$$
   Dimostrare questa formula per $n = 1$ evidenziando le ipotesi, con particolare attenzione all'esistenza di un certo limite....
   d) Considerazioni sulla rapidità della tendenza a 0 della trasf. di Fourier di f in funzione della regolarità di f.

4. a) "La trasformata di Laplace tende a 0 per $s \to \infty$". Questo asserto è falso. Si precisino le condizioni ulteriori sotto le quali tale asserto è invece vero.
   b) Si definisca l'ascissa di convergenza (assoluta).

5. Risolvere nei due modi (metodo standard e metodo della L-trasformata) il problema di Cauchy
   $$y' + 3y = 4e^t \qquad y(0) = 0$$

illustrando i teoremi usati. Che cosa è il *sistema fondamentale di integrali* che si usa nel metodo standard?
c) Traslazioni, cambiamento di scala, funzioni periodiche: scegliere uno di questi argomenti ed illustrare con un esempio il comportamento della $\mathcal{L}$-trasformata.

6. a) Si dia la definizione di prodotto di convoluzione in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{R}_0^+$ e si spieghi perché l'integrale che compare nella seconda definizione è esteso ad un intervallo più ristretto di quanto sia l'intera retta.
b) Si calcolino in $\mathcal{R}_0^+$ i prodotti $t * t$ e $t * e^t$

7. a) Si scriva la prima formula fondamentale della L-trasformata; esporre quindi le proprie considerazioni sulla convergenza a zero (di quale funzione e dove?) e sulla sommabilità (di quale funzione e dove?).

8. a) Usando la prima formula fondamentale della trasformata di Laplace e il "teorema della divisione per t" calcolare la L-trasformata di
$$f(t) = t \int_0^t \frac{e^{2u} - e^{3u}}{u}\, du.$$
Qual è l'ascissa di convergenza (assoluta)? Come si risolve il problema della polidromia del logaritmo? Come va precisato l'asserto "la L-trasformata della somma è uguale alla somma delle L-trasformate"?
b) In che modo la trasformata di Fourier è legata a quella di Laplace?

9. a) Trasformata di Laplace di una serie di potenze e serie delle trasformate di Laplace di monomi: dove coincidono? dove si può parlare di prolungamento analitico? Illustrare con un esempio.
b) Trasformata di Laplace di $\int_0^t f(\tau)\, d\tau$: enunciato e dimostrazione (per la trasf. assoluta).
c) "Funzione peso" e "polinomio caratteristico": cosa sono e che relazione c'è tra loro?
d) In una equazione differenziale del 2^o ordine, in cui l'equazione caratteristica ha una radice doppia, quale è il sistema fondamentale di integrali? Perché?

10. a) Cosa è lo spazio $\mathcal{D}$ e cosa lo spazio $\mathcal{D}'$? Quali sono le convergenze in questi due spazi?
b) Le distribuzioni temperate sono ...
c) Definire la distribuzione δ e dimostrare che è la derivata della distribuzione di Heaviside.
d) Definire il prodotto tra una funzione C^∞ e una distribuzione, e definire la derivata di una distribuzione. In quest'ultima definizione compare un segno "-"; perché?