COMPLEMENTI DI MATEMATICA

Esercitazione in classe del 2.11.2005 Tempo concesso: 90 minuti

Vengono proposti 4 esercizi per ogni tipo. Nella prova parziale ne verrà proposto uno solo. Gli altri sono al fine di esercitarsi.

1. a) Sullo spazio $C^0([-\pi,\pi])$ abbiamo considerato tre norme: quella che gli è propria e quelle che sono indotte dagli spazi $L^2([-\pi,\pi])$ e $L([-\pi,\pi])$ che contengono $C^0([-\pi,\pi])$. Presentare singolarmente le tre norme.
   b) Si dia la definizione di spazio metrico; uno spazio di Hilbert può essere dotato sempre di una metrica? Se sì, come?
   c) Si dia la definizione di spazio metrico *completo*. Uno spazio di Hilbert è uno spazio metrico completo? Rispetto a quale norma?
   d) Si dia la definizione di *isomorfismo tra spazi di Hilbert* e si illustri una situazione di due spazi di Hilbert isomorfi.

2. a) La frase "lo spazio A è denso nello spazio B" ha senso in tutti gli spazi metrici? solo negli spazi normati? Illustrare la situazione.
   b) Si illustri il concetto di dipendenza lineare, e si definisca un sistema di vettori completo (o *base*) in uno spazio vettoriale.
   c) Quando un sistema di vettori si dice *ortogonale*? e quando *ortonormale*? quali basi abbiamo visto in $\ell^2$? e in $L^2([-\pi,\pi])$? Sono basi ortogonali? anche ortonormali?
   d) Esporre il problema della migliore approssimazione in norma. In quali spazi esso ha sempre soluzione?

3. a) Il criterio di Riemann-Lebesgue vale per quali funzioni? La dimostrazione è fatta per certe funzioni particolari e poi estesa sfruttando una densità. Esporre la situazione.
   b) Per una serie numerica la tendenza a 0 dei coefficienti non è condizione sufficiente per la convergenza della serie. Illustrare un caso.
   c) Si definisca una serie trigonometrica; quindi si definisca una serie di Fourier. Che relazione c'è tra i due tipi di serie?
   d) Funzioni il cui sviluppo di Fourier ha solo armoniche pari, oppure solo armoniche dispari; che tipo di particolarità hanno queste funzioni?

4. a) Consideriamo la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin nx;$$
   converge puntualmente in $[-\pi,\pi]$? Converge uniformemente? È una serie di Fourier? Se ne può effettuare la derivazione per serie? Giustificare le risposte.
   b) Sviluppare in serie di Fourier $f(x) = x^2$ per $x \in [0,\pi]$. Come converge tale serie? A quali valori?

c) Sviluppare in serie di Fourier $f(x) = x^2$ per $x \in [-\pi, \pi]$. Come converge tale serie? A quali valori?
d) Effettuare il prolungamento dispari all'intervallo $[\pi, \pi]$ della funzione $f(x) = x^2$ per $x \in [0, \pi]$. Come converge la sua serie di Fourier? A quali valori?

5. a) Si esponga un criterio per la convergenza uniforme di una serie trigonometrica.
b) L'insieme di convergenza di una serie di potenze nel campo complesso è un cerchio di centro $a$ e raggio $r$. In quali sottoinsiemi di tale cerchio c'è anche convergenza uniforme?
c) Data una funzione olomorfa $f$ definita in un intorno del punto $a$, quante serie di potenze di centro $a$ convergono uniformememte ad $f$? Quali?
d) Una serie di potenze si può sempre derivare per serie?

6. a) Si esponga il teor. di Cauchy per le funzioni olomorfe, sia nel caso delle regioni semplicemente connesse che nel caso di regioni non semplicemente connesse.
b) Si dimostri intuitivamente il teor. di Cauchy per le regioni non semplicementi connesse.
c) Scrivere la formula di Cauchy, in cui compare un integrale funzione di un punto $a$. Per quali valori di $a$ essa vale? Che valore ha l'integrale a seconda di dove si trova $a$?
d) Si scriva la formula di Cauchy per le derivate successive. Quale sarebbe il punto cruciale nella dimostrazione?

7. a) Le funzioni a derivata limitata in tutto un intervallo garantiscono che in ogni punto di tale intervallo esse sono hölderiane (di che ordine?), e ciò a sua volta garantisce la convergenza puntuale ad $f(x)$ della loro serie di Fourier in ciascun punto. Perché? Descrivere la situazione utilizzando anche un esempio concreto.
b) C'è una relazione tra la hölderianità di un certo ordine e la derivabilità di una funzione. Illustrare la situazione.
c) Si illustri la relazione tra funzioni continue, lipschitziane e derivabili in un certo punto $x_0$.
d) Una funzione $C^2([a, b])$ è hölderiana di ordine 2 in tutti i punti di $[a, b]$? Perché?

8. a) Si definisca la serie geometrica di centro l'origine, e quindi se ne scriva la sua funzione somma tramite una serie di potenze di centro un altro puno $a$ di olomorfia.
b) Si dia la definizione di olomorfia in una regione $\Omega$ per una funzione di variabile complessa. Le condizioni di Cauchy-Riemann sono necessarie per l'olomorfia in una regione? sono sufficienti?

c)Si definiscano le funzioni circolari e iperboliche nel campo complesso, e quindi si dimostri che l'immagine di $\sin z$ è tutto $\mathbb{C}$.
d) Si definiscano le funzioni $\lg z$, $a^z$, e quindi si calcolino i valori di $i^{2i}$.

9. a) Si definisca la funzione $\sin z$ e si dimostri che i suoi zeri sono solo quelli della sua restrizione ai reali.
b) Si dimostri che $f(x,y) = e^x \;\cos y$ è una funzione armonica e se ne trovi l'armonica coniugata tale che $f(0) = 2$.
c) Date due funzioni armoniche, esse sono sempre la parte reale e il coefficiente dell'immaginario di una funzione armonica? della stessa funzione armonica? Illustrare la situazione.
d) Forme esatte e soltanto localmente esatte. Definizioni e commenti.

10. a) Si definisca una trasformazione conforme; si verifichi che $e^z$ induce una trasformazione conforme da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mantenendo gli angoli tra le immagini delle rette parallele agli assi.
b) Definire una curva regolare, il suo orientamento, una forma differenziale e l'integrale di una forma differenziale su una curva.
c) Enunciare il teor. di Cauchy per gli integrali delle funzioni di variabile complessa, e dimostrare l'annullarsi dei due integrali $\oint_C dz$ e $\oint_C z\; dz$ quando $C$ è una curva omologa a zero.
d) Si dia la definizione di *prolungamento analitico*, utilizzando come esempio i vari sviluppi (in serie di potenze) di centri diversi della funzione $\frac{1}{1-z}$