CM68sett.tex

Complementi di Matematica - a. a. 2006-2007

Ottava settimana

Inizio: martedì 21.11.2006

Ripresa delle equazioni differenziali di ordine primo e secondo e della loro trasformata di Laplace (§ 4.8.3 e 4.8.4).
Caso in cui l'equazione caratteristica ha due radici reali e distinte, in cui ha due radici complesse coniugate e in cui ha due radici reali e coincidenti (formule da (4.1.18) a (4.1.21)).
Riduzione, nel caso in cui le radici siano complesse, a un sistema fondamentale di integrali costituito da due funzioni reali: una combinazione lineare delle funzioni

$$e^{(c_1+ic_2)t} = e^{c_1t}e^{ic_2t} \qquad e^{(c_1-ic_2)t} = e^{c_1t}e^{-c_2t}$$

si può esprimere come combinazione lineare (ovviamente a coefficienti diversi) di

$$e^{c_1t}\sin c_2t \qquad e^{c_1t}\cos c_2t$$

e quindi si ritrovano le funzioni con cui si esprimevano le soluzioni dell'equazione differenziale in Matematica 3.

Si noti che le soluzioni di un'equazione lineare omogenea di ordine n costituiscono uno spazio vettoriale di dimensione n di cui il sistema fondamentale di integrali costituisce una base. Nel caso di un'eq. diff. del 2^o ordine la base è appunto costituita da due funzioni linearmente indipendenti.

Commento sul fatto che la soluzione di un'equazione differenziale tramite la $\mathcal{L}$-trasformata è la soluzione di un problema di Cauchy, perché è necessaria la conoscenza dei valori iniziali $y(0)$, $y'(0)$. Si trova infatti una soluzione unica, e non un integrale generale.

Nel caso $y'' + ay' + cy = f(t)$ si ha, trasformando:

$$\mathcal{L}(y) = \frac{y(0)s + y'(0) + by(0)}{s^2 + as + b} + \frac{\mathcal{L}(f)}{s^2 + as + b}$$

e antitrasformando:

$$y = h + f * g$$

dove h è l'antitrasformata del primo addendo del secondo membro, quindi un integrale dell'eq. omogenea associata (che appunto si ha per $f = 0$): h quindi dipende solo dal sistema e dalle condizioni iniziali. A sua volta invece $f * g$ è la soluzione dell'eq. non omogenea nel caso delle condizioni iniziali tutte nulle.
(Quanto sopra si trova esposto in 4.11.5 e 4.11.6 fino alla metà di p. 216, e nell'esercizio 4.12.6 a p. 229).

Le equazioni integrali: esempi (4.12.1-4.12.3) ed esercizi da 4.12.9 a 4.12.13.
Tra gli esercizi proposti: da 55 a 68.

Esercizio

$$\begin{cases} y'(t) = \int_0^t y(\tau)\ d\tau \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Trasformando:

$$s\mathcal{L}(y) - 1 = \frac{1}{s}\mathcal{L}(y)$$

da cui $\mathcal{L}(y) = \frac{s}{s^2-1} = \mathcal{L}\cosh t$.

Esercizio

$$y(t) = t - \int_0^t y(\tau)\ d\tau$$

$$\Rightarrow \ldots \mathcal{L}(y) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{s}{s+1} = \cdots = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

Esercizio

$$\begin{cases} y'(t) = 2\int_0^t \sin(t-\tau)y'(t)\ d\tau + e^t \\ y(0) = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Si trova prima la soluzione in y', che risulta essere

$$y' = \cosh t + te^t$$

Ora bisogna integrare tenendo conto della condizione iniziale (il secondo termine si integra per parti)

Esercizio

$$\begin{cases} x' + y = e^t \\ x - 2y' = e^{2t} \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 0 \end{cases}$$

****

Non fanno parte del programma d'esame: § 4.9; § 4.10 salvo 4.10.3 e 4.10.10; § 4.11 salvo 4.11.5 e la prima metà di 4.11.6; la prima metà di pag. 226; 4.12.4; 4.12.7; 4.12.8; da 4.12.14 alla fine del cap. 4.