Ottava settimana (continuazione)

Formula di inversione delle trasformate di Fourier e di Laplace (4.10.3)

Esempio di funzione analitica che tende a 0 nell'angolo convesso e tuttavia non è una $\mathcal{L}$-trasformata: e^{-s} (4.10.10).

Introduzione alla teoria delle distribuzioni.
Funzioni di $\mathcal{D}$: infinitamente derivabili e a supporto compatto.
Conmvergenza in $\mathcal{D}$
Funzionali lineari: V^*; funzionali lineari e continui; in generale $V' \subset V^*$.
Istituzione di una struttura di spazio vettoriale tra i funzionali lineari e continui.
Simbolo di dualità.

Funzionali lineari e continui su $\mathcal{D}$: $\mathcal{D}$'(*distribuzioni*)

Primo esempio:

$$< T_f, \phi >= \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)\ dx \quad \forall\ \phi \in \mathcal{D}$$

(si noti la sommabilità dell'integrale in quanto ϕ e quindi $f \cdot \phi$ hanno supporto compatto).

Verificare
$| < T_f, \phi_i > - < T_f, \phi > | \leq (\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\ dx) \cdot \max_{x \in K} |\phi_i(x) - \phi(x)|$
(*distribuzione associata*)
Identificazione: $< f, \phi >=< T_f, \phi >$.
Associazione ad una misura di densità.

Distribuzione di Dirac: $< \delta, \phi >= \phi(0) >$.
Verifica della continuità sulle ϕ_i.

Distribuzione di Dirac traslata: $< \delta_a, \phi >= \phi(a)$.

Rappresentazione della δ come limite di successioni di funzioni di $\mathcal{D}$, e uso della notazione integrale $\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\phi(x)\ dx = \phi(0)$ (*funzione impulsiva*):

$$\alpha(x) = \begin{cases} he^{-\frac{1}{1-x^2}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

h è il fattore di normalizzazione, in modo che l'integrale venga 1.

Se si prendono le $\alpha_k(x) = k\alpha(kx)$ si nota che l'integrale è sempre uguale a 1, e l'integrale del limite non è uguale al limite degli integrali (convergenza puntuale quasi ovunque, cioè dappertutto salvo che nell'origine, ma non in $L(\mathbb{R})$ né tantomeno uniforme).

Altri esempi di successioni di funzioni che convergono alla δ (funzioni a scala).
Esempio delle funzioni campionate.

Distribuzione $< T, \phi >= \phi'(0)$, che anch'essa è un funzionale lineare e continuo su $\mathcal{D}$.

Distribuzione di Heaviside: $< H, \phi >= \int_0^{+\infty} \phi(x)\ dx$, che pure è un funzionale continuo.

Insieme (aperto) *nullo* di una distribuzione (che è un insieme di $\mathbb{R}$, non di $\mathcal{D}$!).
Supporto di una distribuzione: complementare del suo insieme nullo.
Il supporto della δ è $\{0\}$, il supporto di δ_a è $\{a\}$.

Prodotto di una funzione $\alpha \in C^\infty$ per una distribuzione T:
$< \alpha T, \phi >=< T, \alpha\phi >$.
Esempio: $x^n \delta = x^n(0) \cdot \delta = 0$.
Attenzione: le uguaglianze della riga precedente sono tra distribuzioni, non tra numeri (sarebbero tra numeri se fossero applicate a ϕ).

$$< \alpha T_f, \phi >=< T_f, \alpha\phi >= \int_{\mathbb{R}} f(x)\alpha(x)\phi(x)\ dx =< \alpha f, \phi > .$$

Derivazione delle distribuzioni:

$$< T', \phi >= - < T, \phi' >$$

(5.2.1; 5.2.2)

****

Non fanno parte del programma d'esame: dalla seconda metà di p. 258 a 5.1.16; 5.1.19; da 5.1.23 a 5.1.32.