COMPLEMENTI DI MATEMATICA

Esercitazione in classe del 1.12 2006 Tempo concesso: 90 minuti

Vengono proposti più esercizi per ogni tipo. Nella prova parziale verranno proposti circa dieci esercizi di tipo diverso. Gli altri sono per esercitarsi.

1. a) *Larghezza di banda* e *larghezza convenzionale di banda*: se ne descriva la relazione con il teorema del campionamento.
   b) Si scriva la formula di Shannon e si facciano i grafici delle funzioni che vi compaiono. Sotto quali ipotesi si ha la ricostruzione del segnale senza errore di *aliasing*?
   c) la trasformata di Fourier della derivata di f è ...; si metta in relazione la derivabilità di f con la tendenza a 0 della sua trasformata.
   d) prodotto di convoluzione in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{R}_0^+$: definizioni e differenze.

2. Data la soluzione di un'equazione differenziale presentata sotto la forma $y = h + f * g$ si dica cosa indicano le singole funzioni $f,\ g,\ h$.

3. Nella formula di inversione della $\mathcal{L}$-trasformata in un membro appare una variabile che non appare nell'altro. Spiegare l'apparente contraddizione.

4. La trasformata di Fourier è *uniformemente* continua su $\mathbb{R}$; l'integrale di Laplace è *uniformemente* convergente in un certo angolo (quale?); la norma di $C^0([-\pi,\pi])$ è quella che induce la convergenza *uniforme*. Si dica cosa significa il concetto di uniformità in questi casi specifici.

5. Si faccia un esempio di funzione appartenente allo spazio $\mathcal{D}$ e si dica perché essa non può essere la restrizione ad $\mathbb{R}$ di una funzione olomorfa. Si esponga quindi la convergenza nello spazio $\mathcal{D}$ e si dica cosa significa che un funzionale è continuo su $\mathcal{D}$.

6. Si dica quali tra le seguenti funzioni olomorfe non sono trasformate di Laplace, dicendo il perché, e invece per quelle che lo sono si trovino le rispettive ascisse di convergenza e le funzioni di cui esse sono trasformate:
$$F_1(s) = \frac{s}{s^2-4};\quad F_2(s) = \frac{s^2}{s^2-4};\quad F_4(s) = \frac{2}{s^2-4s+4}$$

7. La funzione $F(s) = e^{-as}$ è la trasformata di Laplace delle distribuzione $\delta_{(a)}$. Perché non è la trasformata di Laplace di una funzione, pur tendendo a 0 per $s \to \infty$, $s \in A(s_0, \theta)$?

8. La trasformata di Laplace di f è $s\mathcal{L}(f) - f(0)$; da dove proviene il termine $-f(0)$?

9. Si dia la definizione di $\mathcal{L}$-trasformata assoluta e della relativa ascissa di convergenza. Si dia poi un esempio di funzione che pur essendo localmente sommabile non è $\mathcal{L}$-trasformabile, spiegandone il motivo.

10. a) Si risolva l'equazione $y' - 2y = e^{2t} + t$ sia con il metodo della $\mathcal{L}$-trasformata sia con il metodo standard e si paragonino le due soluzioni: dove sono uguali?
b) Si risolva l'equazione $y'' - 2y' = e^t$ sia con il metodo della $\mathcal{L}$-trasformata sia con il metodo standard e si paragonino le due soluzioni: dove sono uguali?
c) Si risolva l'equazione $y' - y = \sin t$ sia con il metodo della $\mathcal{L}$-trasformata sia con il metodo standard e si paragonino le due soluzioni: dove sono uguali?

11. a) Calcolare la $\mathcal{L}$-trasformata di
$$f(t) = t \int_0^{4t} \frac{e^u - e^{2u}}{u} \, du$$
precisando i teoremi utilizzati e le ascisse di convergenza che si vanno configurando nei singoli passaggi.
b) Enunciare e dimostrare il teorema del cambiamento di scala per la $\mathcal{L}$-trasformata.
c) Calcolare
$$\mathcal{L}\left(\int_0^{2t} \frac{\sin 3u}{2u} \, du\right)$$
d) Si risolva l'equazione integrale
$$y(t) = 2\int_0^t \sin(t-\tau) y(\tau) \, d\tau + e^t$$
d) Si risolva il problema integro-differenziale
$$\begin{cases} y'(t) = \int_0^t y(\tau) \, d\tau \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
Se si differenziassero ambo i membri giungendo ad un'eqazione differenziale del secondo ordine, quale condizione sulla derivata prima verrebbe da imporre se si vuole che le soluzioni siano ancora le stesse?

12. Si verifichi la validità del teorema sulla L-trasformata del prodotto di convoluzione calcolando $\mathcal{L}(e^t * e^t)$.

13. Si definisca la derivazione nel senso delle distribuzioni, e poi si calcoli quale distribuzione è la derivata della (distribuzione associata alla) funzione $f(x) = |x|$. Si definisca la convoluzione $S*T$ tra distribuzioni.

14. Calcolare $\int_0^{+\infty} e^{-5t} t \sin t \, dt$. Si può calcolare con lo stesso metodo $\int_0^{+\infty} e^{5t} t \sin t \, dt$?